第 27 章

双対空間

内積から線形汎関数へ

横ベクトル（$1 \times n$ 型行列）を縦ベクトル（$n \times 1$ 型行列）にかけると、1×1 のスカラー値が得られる。

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

上の式は、数ベクトル空間の内積そのものである。

$$\langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{v} = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

さて、観測装置としての内積［第 15 章］で述べたように、

内積 $\langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{v} \rangle$ は、観測装置 $\langle \boldsymbol{a} |$ によるベクトル $| \boldsymbol{v} \rangle$ の測定結果

という捉え方もできる。

ここで、観測装置である横ベクトル $\langle \boldsymbol{a} |$ を、縦ベクトル $| \boldsymbol{v} \rangle$ から内積を返す関数 $\phi_{\boldsymbol{a}}$ とみることにしよう。

$$\phi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{v} \rangle = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

$\phi_{\boldsymbol{a}}$ は、縦ベクトル $\boldsymbol{v}$ を入力とし、スカラー値 $\langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{v} \rangle$ を返す、$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への写像である。

さらに、内積の双線形性から、$\phi_{\boldsymbol{a}}$ は線形写像であることがわかる。

$$\begin{aligned}\phi_{\boldsymbol{a}}(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) &= (\boldsymbol{a}, c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) \\ &= c_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_1) + c_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_2) \\ &= c_1\phi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}_1) + c_2\phi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}_2)\end{aligned}$$

この関数 $\phi_{\boldsymbol{a}}$ は、線形汎関数と呼ばれる写像の一例である。

def - $\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数

$\mathbb{R}^n$ 上の関数 $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が線形写像であるとき、ϕ を $\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数あるいは線形形式という。

線形汎関数のベクトル表示

$\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数は、すべて内積から定めることができる。

theorem - $\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数の内積による表現

$\mathbb{R}^n$ 上の任意の線形汎関数 $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対し、ある $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ がただ一つ存在して、次を満たす。

$$\psi = \phi_{\boldsymbol{a}} = \langle \boldsymbol{a} | \cdot \rangle$$

証明

$\mathbb{R}^n$ の標準基底を $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ とする。

このとき、任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ は、次のように表される。

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n$$

これに ψ を作用させると、線形汎関数 ψ は線形性をもつので、

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{v}) &= \psi(v_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n) \\ &= v_1\psi(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + v_n\psi(\boldsymbol{e}_n) \\ &= \begin{pmatrix}\psi(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & \psi(\boldsymbol{e}_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1 \\ \vdots \\ v_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで、

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}\psi(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & \psi(\boldsymbol{e}_n)\end{pmatrix}$$

とおけば、次が成り立つ。

$$\psi(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{a}|\boldsymbol{v}\rangle = \phi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v})$$

$\boldsymbol{v}$ は任意のベクトルなので、

$$\psi = \phi_{\boldsymbol{a}} = \langle \boldsymbol{a}|\cdot\rangle$$

となるような $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ の存在が示された。

さらに、次式を振り返ると、ψ が決まれば $\boldsymbol{a}$ が一意に定まることがわかる。

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}\psi(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & \psi(\boldsymbol{e}_n)\end{pmatrix}$$

よって、ψ に対して $\boldsymbol{a}$ はただ一つ存在する。 ■

上の定理の証明で現れた次の式は、2 通りの読み方ができる。

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}\psi(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & \psi(\boldsymbol{e}_n)\end{pmatrix}$$

ψ が決まれば、$\psi(\boldsymbol{e}_1), \ldots, \psi(\boldsymbol{e}_n)$ の値が決まるので、$\boldsymbol{a}$ がただ一つ定まる。
逆に、**theorem 10.7「基底上の値による線型写像の同一性判定」**より、基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ に対する ψ の値が決まれば ψ の形が決まるので、上の式のように $\boldsymbol{a}$ を定めれば、$\boldsymbol{a}$ に対応して ψ の形がただ一つに定まることになる。

まとめると、

- すべてのベクトル $\boldsymbol{a}$ は線形汎関数 ψ をひとつ定める
- すべての線形汎関数 ψ はベクトル $\boldsymbol{a}$ をひとつ定める

$\boldsymbol{a}$ から ψ への対応は一対一であり、ψ から $\boldsymbol{a}$ への対応も一対一である。
すなわち、$\mathbb{R}^n$ のベクトルと $\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数の間には、全単射が存在する。

全単射な対応は、本来同じものに「異なる表現を与えている」と捉えることができる。

縦ベクトルと横ベクトルによる線形汎関数の表現

次の式も、先ほどの定理の証明で現れたものである。

$$\psi(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \psi(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & \psi(\boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

この式もまた、2 通りの読み方ができる。

$\boldsymbol{a}$ を横ベクトルとみるなら、

$$\psi(\boldsymbol{v}) = \underbrace{\begin{pmatrix} \psi(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & \psi(\boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{a}} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{v}$$

この見方では、線形汎関数は横ベクトル $\boldsymbol{a}$ との「行列としての積」である。
線形汎関数を行列の積として定義すれば、「横」ベクトル $\boldsymbol{a}$ が線形汎関数の表現行列に相当すると捉えられる。

一方、$\boldsymbol{a}$ を縦ベクトルとみるなら、

$$\psi(\boldsymbol{v}) = \underbrace{\begin{pmatrix} \psi(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & \psi(\boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{a}^\top} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})$$

この見方では、線形汎関数は縦ベクトル $\boldsymbol{a}$ との「内積」である。
線形汎関数を内積として定義すれば、「縦」ベクトル $\boldsymbol{a}$ が線形汎関数の表現行列に相当すると捉えられる。

このように、線形汎関数という同じものに対して、横ベクトルと縦ベクトルは「異なる表現を与えている」とも解釈できる。
横ベクトルと縦ベクトルが転置という関係で結ばれていることで、この 2 通りの見方が可能になる。

線形汎関数の空間

内積の双線形性は、任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して、

$$(c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{v}) = c_1(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{v}) + c_2(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{v})$$

が成り立つというものだった。

これは、$\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数が満たす関係式と読み替えることができる。

$$\phi_{c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2}(\boldsymbol{v}) = c_1\phi_{\boldsymbol{a}_1}(\boldsymbol{v}) + c_2\phi_{\boldsymbol{a}_2}(\boldsymbol{v})$$

この関係式は、$\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数の集合に、線形空間としての構造をもたらす。

$\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数の集合を $(\mathbb{R}^n)^*$ と書くことにしよう。
この集合 $(\mathbb{R}^n)^*$ に和とスカラー倍の演算を導入することで、$(\mathbb{R}^n)^*$ を線形空間とみなすことができる。

線形汎関数の空間の基底

$\mathbb{R}^n$ の基底を $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ とするとき、任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ は、

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + v_n\boldsymbol{u}_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

という線形結合で表すことができる。
ここで、$v_1, \ldots, v_n$ は、基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ に関する $\boldsymbol{v}$ の成分あるいは座標と呼ばれる。

このうち第 j 座標 v_j を取得する関数を ϕ_j と定めよう。

$$\phi_j(\boldsymbol{v}) = v_j$$

このような関数を座標関数と呼ぶことにする。

また、ϕ_j は線形であるため、$\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数である。

補足：ϕ_j の線形性

任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ が基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ に関して次のように表せるとする。

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \boldsymbol{u}_i, \quad \boldsymbol{w} = \sum_{j=1}^{n} w_j \boldsymbol{u}_j$$

このとき、ϕ_j は次のように定義される。

$$\phi_j(\boldsymbol{v}) = v_j, \quad \phi_j(\boldsymbol{w}) = w_j$$

ベクトルの和を考えると、

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{n} (v_i + w_i) \boldsymbol{u}_i$$

より、第 j 座標は $v_j + w_j$ となるので、

$$\phi_j(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = v_j + w_j = \phi_j(\boldsymbol{v}) + \phi_j(\boldsymbol{w})$$

ベクトルのスカラー倍を考えると、

$$\alpha \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha v_i) \boldsymbol{u}_i$$

より、第 j 座標は αv_j となるので、

$$\phi_j(\alpha \boldsymbol{v}) = \alpha v_j = \alpha \phi_j(\boldsymbol{v})$$

以上より、$\phi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は線形写像であることが示された。

ϕ_j を用いると、$\boldsymbol{v}$ を表す線形結合は次のように書ける。

$$\boldsymbol{v} = \phi_1(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \phi_n(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{u}_n$$

ここで、たとえば $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{u}_1$ に置き換えた式を考える。

$$\boldsymbol{u}_1 = \phi_1(\boldsymbol{u}_1) \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \phi_n(\boldsymbol{u}_1) \boldsymbol{u}_n$$

この等式が成り立つには、

- $\phi_1(\boldsymbol{u}_1) = 1$
- $\phi_2(\boldsymbol{u}_1) = 0, \ldots, \phi_n(\boldsymbol{u}_1) = 0$

でなければならない。

右辺の $\boldsymbol{u}_1$ だけが残り、他の項が消えることで、$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_1$ という等式が成り立つ。

同様に考えると、$\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{u}_i$ に置き換えた式

$$\boldsymbol{u}_i = \phi_1(\boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \phi_n(\boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{u}_n$$

が成り立つには、$\boldsymbol{u}_i$ だけが残り、他の項が消えなければならないので、

$$\phi_j(\boldsymbol{u}_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

と定める必要がある。

この式により、$\mathbb{R}^n$ の基底 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ を選べば、それらに対応する線形汎関数 $\phi_1, \ldots, \phi_n$ が定まることがわかる。

そしてこのとき、$\phi_1, \ldots, \phi_n$ は $(\mathbb{R}^n)^*$ の基底となっている。

theorem 27.1 - $\mathbb{R}^n$ における基底に対応する線形汎関数の構成

$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の基底とするとき、$\phi_j \in (\mathbb{R}^n)^*$ を次のように定める。

$$\phi_j(\boldsymbol{u}_i) = \delta_{ij}$$

このような $\phi_1, \ldots, \phi_n$ は $(\mathbb{R}^n)^*$ の基底をなす。

証明

$\phi_1, \ldots, \phi_n$ が線型独立であること

次のような $\phi_1, \ldots, \phi_n$ の線形関係式を考える。

$$c_1\phi_1 + \cdots + c_n\phi_n = 0$$

このとき、任意の j に対して、

$$
\begin{aligned}
(c_1\phi_1 + \cdots + c_n\phi_n)(\boldsymbol{u}_j) &= c_1\phi_1(\boldsymbol{u}_j) + \cdots + c_n\phi_n(\boldsymbol{u}_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(\boldsymbol{u}_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i\delta_{ij} \\
&= c_j = 0
\end{aligned}
$$

が成り立たなければならない。

これは $\phi_1, \ldots, \phi_n$ が線型独立であることを示している。 ■

$\phi_1, \ldots, \phi_n$ が $(\mathbb{R}^n)^*$ を張ること

$\psi \in (\mathbb{R}^n)^*$ を任意にとると、$\boldsymbol{u}_j$ に対する値 $\alpha_j = \psi(\boldsymbol{u}_j)$ が定まる。

このとき、α_j を係数とする $\phi_1, \ldots, \phi_n$ の線形結合を作ると、

$$
\begin{aligned}
(\alpha_1\phi_1 + \cdots + \alpha_n\phi_n)(\boldsymbol{u}_j) &= \alpha_1\phi_1(\boldsymbol{u}_j) + \cdots + \alpha_n\phi_n(\boldsymbol{u}_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\phi_i(\boldsymbol{u}_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\delta_{ij} = \alpha_j \\
&= \psi(\boldsymbol{u}_j)
\end{aligned}
$$

ϕ_j, ψ はともに $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への線形写像であり、ϕ_j の線形結合もまた $(\mathbb{R}^n)^*$ の元なので $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への線形写像である。

よって、$\mathbb{R}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ に対して同じ値をとることから、**theorem 10.7**「基底上の値による線型写像の同一性判定」より、

$$\psi = \alpha_1\phi_1 + \cdots + \alpha_n\phi_n$$

がいえる。

したがって、任意の $\psi \in (\mathbb{R}^n)^*$ は $\phi_1, \ldots, \phi_n$ の線形結合として表すことができるため、

$$(\mathbb{R}^n)^* = \langle \phi_1, \ldots, \phi_n \rangle$$

が示された。 ■

線形汎関数の空間の次元

$\mathbb{R}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ と、それに対応する $(\mathbb{R}^n)^*$ の基底 $\{\boldsymbol{\phi}_1, \ldots, \boldsymbol{\phi}_n\}$ は、どちらも n 個のベクトルの組になっている。

> ここでいう「ベクトル」とは、「線形空間の元」という意味である。$(\mathbb{R}^n)^*$ も線形空間であるので、その元である線形汎関数も「ベクトル」と呼んでいる。

基底をなすベクトルの個数は、その空間の次元として定義されるので、次のことがいえる。

theorem – $\mathbb{R}^n$ とその線形汎関数の空間の次元の一致

$\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数の空間 $(\mathbb{R}^n)^*$ の次元は、$\mathbb{R}^n$ の次元と等しい。

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim (\mathbb{R}^n)^* = n$$

また、**theorem 12.2**「線形代数における鳩の巣原理の抽象版」より、次元が等しいことから、$\mathbb{R}^n$ と $(\mathbb{R}^n)^*$ は線形同型である。
すなわち、$\mathbb{R}^n$ の元（縦ベクトル）と $(\mathbb{R}^n)^*$ の元（$\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数）の間には、全単射が存在する。

基底を決めれば、縦ベクトルと線形汎関数を同一視する（同じものの「異なる表現」と捉える）ことができる。

横ベクトルと座標関数

$n \times 1$ 型行列（n 次の縦ベクトル）全体の集合は $\mathbb{R}^n$ と表された。
$1 \times n$ 型行列（n 次の横ベクトル）全体の集合を ${}^t\mathbb{R}^n$ と表すことにする。

${}^t\mathbb{R}^n$ の元は $1 \times n$ 型行列なので、$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への線形写像（すなわち $\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数）を表現している行列だと考えることができる。

座標関数の表現行列

基本ベクトルを転置したもの ${}^t\boldsymbol{e}_j \in {}^t\mathbb{R}^n$ を縦ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ にかけると、$\boldsymbol{v}$ の j 番目の成分が得られる。

たとえば、$n = 3,\ j = 2$ の場合、

$$
{}^t\boldsymbol{e}_2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_2
$$

といった具合に、2 番目の成分 v_2 が得られる。

このように、ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、その j 番目の成分を返す座標関数を x_j と表記することにしよう。

$$
\begin{array}{cccc}
x_j : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
 & \boldsymbol{v} & \longmapsto & v_j = {}^t\boldsymbol{e}_j \boldsymbol{v}
\end{array}
$$

このとき、$x_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数である。

${}^t\boldsymbol{e}_j \boldsymbol{v}$ を行列の積として見ると、横基本ベクトル ${}^t\boldsymbol{e}_j \in {}^t\mathbb{R}^n$ は線形汎関数 x_j の表現行列だと捉えることができる。

[Todo 1: 「基底方向への正射影」という観点についても述べる？]

横ベクトルと線形汎関数の同一視

任意の縦ベクトルは、基本ベクトル（標準基底）の線形結合として一意的に表現できる。

$$
|\boldsymbol{v}\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + v_n \boldsymbol{e}_n
$$

同様に、任意の横ベクトルは、横基本ベクトルの線形結合として一意的に表現できる。

$$
\langle \boldsymbol{a}| = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = a_1 {}^t\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_n {}^t\boldsymbol{e}_n
$$

ここで、内積から線形汎関数へ［第 27 章］で述べた、横ベクトル $\langle \boldsymbol{a}|$ は観測装置という視点に戻って、縦ベクトルを入力したら $\boldsymbol{a}$ との内積を返す線形汎関数を ϕ とおくと、

$$
\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{v} &= \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\
&= a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \\
&= a_1 {}^t\boldsymbol{e}_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \cdots + a_n {}^t\boldsymbol{e}_n \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\
&= a_1 x_1(\boldsymbol{v}) + \cdots + a_n x_n(\boldsymbol{v})
\end{aligned}
$$

よって、任意の線形汎関数 $\phi \in (\mathbb{R}^n)^*$ は、座標関数 $x_1, \ldots, x_n$ の線型結合として表すことができる。

$$
\phi = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n
$$

また、x_i の表現行列が ${}^t\boldsymbol{e}_i$ であることを思い出すと、

$$
\phi = a_1 {}^t\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_n {}^t\boldsymbol{e}_n = \langle \boldsymbol{a}|
$$

というように、線形汎関数 ϕ は横ベクトル $\langle \boldsymbol{a}|$ と同一視することができる。

$\{{}^t\boldsymbol{e}_1, \ldots, {}^t\boldsymbol{e}_n\}$ を基底としてどんな横ベクトルも表現できることは、$\{x_1, \ldots, x_n\}$ を基底としてどんな線形汎関数も表現できることに対応する。
これより、横ベクトルの空間 ${}^t\mathbb{R}^n$ と、線形汎関数の空間 $(\mathbb{R}^n)^*$ は、同じ空間とみなすことができる。

縦ベクトルと横ベクトルの双対性

$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の基底とするとき、任意の縦ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ は、

$$
\boldsymbol{v} = v_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + v_n \boldsymbol{u}_n
$$

という線形結合で表すことができる。

ここで、$v_1, \ldots, v_n$ は基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ に関する $\boldsymbol{v}$ の座標である。

このうち、j 番目の座標 v_j を取得する関数を $\phi_j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ と定めると、ϕ_j は、

$$\phi_j(\boldsymbol{u}_i) = \delta_{ij}$$

を満たし、$\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ が $(\mathbb{R}^n)^*$ の基底となる。

このとき、$(\mathbb{R}^n)^*$ の元（線形汎関数）を横ベクトルと同一視すると、任意の横ベクトル $\phi \in {}^t\mathbb{R}^n$ は、

$$\phi = c_1\phi_1 + \cdots + c_n\phi_n$$

という線形結合で表すことができる。

ここで、$c_1, \ldots, c_n$ は基底 $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ に関する ϕ の座標である。
このうち、j 番目の座標 c_j を取得する関数を $\psi_j \colon {}^t\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ と定めると、ψ_j は、

$$\psi_j(\phi_i) = \delta_{ij}$$

を満たし、$\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ が $({}^t\mathbb{R}^n)^*$ の基底となる。

さて、基底を変えれば座標も変わってしまうので、ψ_j はあくまでも基底が $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ のときの横ベクトルの座標を返す関数である。
さらに、ϕ_j は $\mathbb{R}^n$ の基底が $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ のときの縦ベクトルの座標を返す関数である。

つまり、ψ_j は $\mathbb{R}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ に依存しているので、$\boldsymbol{u}_j \in \mathbb{R}^n$ を入力として ψ_j を定める関数 ι を考えてみる。

$$\begin{array}{cccc} \iota\colon & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & ({}^t\mathbb{R}^n)^* \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \boldsymbol{u}_j & \longmapsto & \psi_j \end{array}$$

ι を用いると、次のように書ける。

$$\iota(\boldsymbol{u}_j) = \psi_j$$

このとき、基底に対して座標は一意的であり、基底が変わると座標が変わることから、

i. 基底 $\{\boldsymbol{u}_j\}_{j=1}^n$ を固定すれば、$\iota(\boldsymbol{u}_j) = \psi_j$ を満たす座標 $\{\psi_j\}_{j=1}^n$ は一意に定まる
ii. 座標 $\{\psi_j\}_{j=1}^n$ を固定すれば、$\iota(\boldsymbol{u}_j) = \psi_j$ を満たす基底 $\{\boldsymbol{u}_j\}_{j=1}^n$ は一意に定まる

という 2 通りの見方ができる。

このように、$\boldsymbol{u}_j \in \mathbb{R}^n$ と $\psi_j \in ({}^t\mathbb{R}^n)^*$ には、「互いに測り、測られる」という対称性がある。このような対称性を双対性という。

この性質を意識し、${}^t\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の双対空間という。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, leftrightarrow, "\text{同一視}"] \arrow[dr, "\text{裏返し}"'] & ({}^t\mathbb{R}^n)^* \\
& {}^t\mathbb{R}^n \arrow[u, "\text{裏返し}"']
\end{tikzcd}$$

双対とは、「裏返しにした関係」と解釈できる。

${}^t\mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の双対空間であるとは、「横ベクトルの空間 ${}^t\mathbb{R}^n$ を裏返しにしたもの $({}^t\mathbb{R}^n)^*$ は、縦ベクトルの空間 $\mathbb{R}^n$ と同一視できる」ということである。

逆に、$\mathbb{R}^n$ は ${}^t\mathbb{R}^n$ の双対空間である。「縦ベクトルの空間 $\mathbb{R}^n$ を裏返しにしたもの $(\mathbb{R}^n)^*$ は、横ベクトルの空間 ${}^t\mathbb{R}^n$ と同一視できる」ということでもある。
すなわち、線形汎関数の空間 $(\mathbb{R}^n)^*$ を横ベクトルの空間 ${}^t\mathbb{R}^n$ と同一視できる。

そこで、${}^t\mathbb{R}^n$ を $(\mathbb{R}^n)^*$ に書き換えると、

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, leftrightarrow, "\text{同一視}"] \arrow[dr, "\text{裏返し}"'] & ((\mathbb{R}^n)^*)^* \\
& (\mathbb{R}^n)^* \arrow[u, "\text{裏返し}"']
\end{tikzcd}$$

という関係が見えてくる。$(\mathbb{R}^n)^*$ を $\mathbb{R}^n$ の双対空間という。
表 $\mathbb{R}^n$ の裏は $(\mathbb{R}^n)^*$ であり、裏の裏 $((\mathbb{R}^n)^*)^*$ は表 $\mathbb{R}^n$ になる。

双対空間と双対基底

ここまでの話を、一般の線形空間 V に拡張しよう。

まず、V 上の線形汎関数を次のように定義する。

def 27.1 – 線形汎関数

V を $\mathbb{R}$ 上の線形空間とする。V から $\mathbb{R}$ への線形写像 $\phi\colon V \to \mathbb{R}^n$ を V 上の**線形汎関数**あるいは**線形形式**という。

V から $\mathbb{R}$ への線形写像、すなわち V 上の線形汎関数全体の集合を考える。

def – 双対空間

V 上の線形汎関数全体の集合を V の**双対空間**といい、V^* と表す。

$$V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R}) = \{\phi\colon V \to \mathbb{R} \mid \phi\text{は線形写像}\}$$

線形空間 V が有限次元の場合は、選んでおいた V の基底に対して、**双対基底**（dual basis）という双対空間 V^* の基底を考えることができる。

theorem 27.2 – 双対基底の構成

V を n 次元の線形空間とし、$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底とする。このとき、$\phi_j \in V^*$ を次のように定める。

$$\phi_j(\boldsymbol{v}_i) = \delta_{ij}$$

このような $\phi_1, \ldots, \phi_n$ は V^* の基底をなす。

この定理は、$V = \mathbb{R}^n$ の場合である **theorem 27.1**「$\mathbb{R}^n$ における基底に対応する線形汎関数の構成」と同様に示すことができる。

また、この定理から次が成り立つ。

theorem 27.3 – 双対空間の次元

n 次元線形空間 V の双対空間 V^* の次元は、V の次元と等しい。

$$\dim V = \dim V^* = n$$

これより、V と V^* は線形同型であることがいえるが、この同型は基底に依存していることに注意しよう。

一旦ここまでの話をまとめると、次のような関係が成り立っている。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, leftrightarrow, "?"] \arrow[dr, "\text{基底による同型}"'] & (V^*)^* \\ & V^* \arrow[u, "\text{基底による同型}"'] \end{tikzcd}$$

再双対空間による自然同型

線形空間 V の双対空間 V^* もまた線形空間になるので、さらにその双対空間 $(V^*)^*$ を考えることができる。
$(V^*)^*$ を V の**再双対空間**あるいは**第 2 双対空間**といい、V^{**} と書くこともできる。

実は $(V^*)^*$ と V は線形同型であり、この同型は V の基底に依存しないことが示される。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, leftrightarrow, "\text{自然な同型}"] \arrow[dr, "\text{基底による同型}"'] & (V^*)^* \\ & V^* \arrow[u, "\text{基底による同型}"'] \end{tikzcd}$$

再双対空間への写像

線形汎関数 $\phi \in V^*$ に $\boldsymbol{v} \in V$ を入力して得られるスカラー値を次のように書くことにする。

$$\langle \phi, \boldsymbol{v} \rangle := \phi(\boldsymbol{v})$$

$\boldsymbol{v} \in V$ を固定したとき、任意の線形汎関数（V^* の元）に $\boldsymbol{v}$ を入力したもの $\langle -, \boldsymbol{v} \rangle$ を考えることができる。

> $-$ はプレースホルダーであり、（線形汎関数なら）なんでも入れられることを意味する。具体的な線形汎関数が決まっていないときは、$-(\boldsymbol{v})$ と書くよりも、$\langle -, \boldsymbol{v} \rangle$ と書いた方がわかりやすい。

ここで、具体的な $\phi \in V^*$ を与えれば、スカラー値 $\langle \phi, \boldsymbol{v} \rangle$ が確定する。

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{\boldsymbol{v}}: & V^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \phi & \longmapsto & \langle \phi, \boldsymbol{v} \rangle \end{array}$$

この写像 $\phi \mapsto \langle \phi, \boldsymbol{v} \rangle$ を $\Phi_{\boldsymbol{v}}$ と書くことにしよう。

$$\Phi_{\boldsymbol{v}}(\phi) = \langle \phi, \boldsymbol{v} \rangle = \phi(\boldsymbol{v})$$

このように定めた $\Phi_{\boldsymbol{v}}: V^* \to \mathbb{R}$ は線形写像であるので、$(V^*)^*$ 上の線形汎関数である。

補足：$\Phi_{\boldsymbol{v}}$ の線形性

$\phi_1, \phi_2 \in V^*$、$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ とする。

ϕ_1, ϕ_2 は線形写像であるので、**def 25.1**「線形写像の和とスカラー倍」より、

$$\begin{aligned} \Phi_{\boldsymbol{v}}(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) &= (c_1\phi_1 + c_2\phi_2)(\boldsymbol{v}) \\ &= c_1\phi_1(\boldsymbol{v}) + c_2\phi_2(\boldsymbol{v}) \\ &= c_1\Phi_{\boldsymbol{v}}(\phi_1) + c_2\Phi_{\boldsymbol{v}}(\phi_2) \end{aligned}$$

となるので、$\Phi_{\boldsymbol{v}}$ は線形写像である。

余談だが、上の式変形は次のように書くこともできる。

$$\begin{aligned} \Phi_{\boldsymbol{v}}(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) &= \langle c_1\phi_1 + c_2\phi_2, \boldsymbol{v} \rangle \\ &= c_1\langle \phi_1, \boldsymbol{v} \rangle + c_2\langle \phi_2, \boldsymbol{v} \rangle \\ &= c_1\Phi_{\boldsymbol{v}}(\phi_1) + c_2\Phi_{\boldsymbol{v}}(\phi_2) \end{aligned}$$

この見方に慣れておくと、後の議論に対して戸惑いが少なくなる。

また、$\Phi_{\boldsymbol{v}}$ は $\boldsymbol{v}$ に依存しているので、各 $\boldsymbol{v} \in V$ に $\Phi_{\boldsymbol{v}} \in (V^*)^*$ を対応させる写像 ι を考えることができる。

$$\begin{array}{rccc} \iota: & V & \longrightarrow & (V^*)^* \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \boldsymbol{v} & \longmapsto & \Phi_{\boldsymbol{v}} \end{array}$$

このように定めた $\iota: V \to (V^*)^*$ は線形写像である。

補足：ι の線形性

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$、$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ とすると、

$$\begin{aligned}\iota(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) &= \Phi_{c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2} \\ &= \langle -, c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2\rangle \\ &= c_1\langle -, \boldsymbol{v}_1\rangle + c_2\langle -, \boldsymbol{v}_2\rangle \\ &= c_1\Phi_{\boldsymbol{v}_1} + c_2\Phi_{\boldsymbol{v}_2} \\ &= c_1\iota(\boldsymbol{v}_1) + c_2\iota(\boldsymbol{v}_2)\end{aligned}$$

となるので、ι は線形写像である。

$\iota\colon V \to (V^*)^*$ は線形写像であるので、ι が線形同型写像であることを示せば、V と $(V^*)^*$ の同型が導かれる。
そのためには、**def 12.1**「線形同型写像」より、ι の全単射性を証明できればよい。

双対空間の分離性

特に ι が単射であることを示すために、次の定理を用いる。

theorem 27.4 - 双対空間の分離性

有限次元線形空間 V において、任意の $\boldsymbol{v} \in V$ で $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ ならば、$\phi(\boldsymbol{v}) \neq 0$ となるような線形汎関数 $\phi \in V^*$ が存在する。

証明

theorem 1.3「単一ベクトルの線型独立性と零ベクトル」より、$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ は線型独立である。
よって、**theorem 10.6**「基底の延長」により、$\boldsymbol{v}$ を含む V の基底 $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を選ぶことができる。

この基底に対応する双対基底 $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \subset V^*$ を考えると、それぞれの ϕ_i は、次の性質をもつ。

$$\phi_i(\boldsymbol{v}_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

このとき $\phi_1(\boldsymbol{v}) = 1$ であるので、$\phi = \phi_1$ をとれば、任意の $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ に対して $\phi(\boldsymbol{v}) = 1$ となる。 ■

再双対空間との同型

theorem – 再双対空間との自然な同型

V が有限次元ならば、$\iota\colon V \to (V^*)^*$ は線形同型である。

証明

写像 ι は単射

$\iota(\boldsymbol{v}) = 0$ すなわち、任意の $\phi \in V^*$ に対して

$$\iota(\boldsymbol{v})(\phi) = \phi(\boldsymbol{v}) = 0$$

であると仮定する。

この仮定は、すべての線形汎関数が $\boldsymbol{v}$ を 0 に写すことを意味する。

ここで、$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ とすると、theorem 27.4「双対空間の分離性」より、$\phi(\boldsymbol{v}) \neq 0$ となるような線形汎関数 ϕ が存在する。

これは $\iota(\boldsymbol{v}) = 0$ という仮定と矛盾するので、$\iota(\boldsymbol{v}) = 0$ のもとでは、$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ でなければならない。

したがって、

$$\iota(\boldsymbol{v}) = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$$

theorem 5.1「零ベクトルへの写像による単射性の判定」より、これは線形写像 ι が単射であることを示している。 ■

写像 ι は全射

theorem 27.3「双対空間の次元」を考えると、

$$\dim(V^*)^* = \dim V^* = \dim V$$

ι が単射であることから $\mathrm{Ker}(\iota) = \{\boldsymbol{o}\}$ なので、**theorem 11.2**「線形写像の次元定理」より、$\dim(V^*)^* = \dim V$ は $\iota\colon V \to (V^*)^*$ が全射であることを示している。 ■

双対ペアリング

V と $(V^*)^*$ の間には、線形同型写像 $\iota\colon V \to (V^*)^*$ が存在する。
このことから、**def 12.2**「部分空間の線形同型」より、V と $(V^*)^*$ は線形同型であることがいえる。

このように、V が有限次元の場合は、V と $(V^*)^*$ を自然に（基底によらずに）同一視することができる。

ここで、再双対空間への写像［第 27 章］を考える際に登場した次の式を再解釈してみよう。

$$\Phi_{\boldsymbol{v}}(\phi) = \phi(\boldsymbol{v})$$

V と $(V^*)^*$ の同型により、$\boldsymbol{v} \in V$ と $\Phi_{\boldsymbol{v}} \in (V^*)^*$ も同一視することができる。
そこで、$\Phi_{\boldsymbol{v}}$ を単に $\boldsymbol{v}$ と書くことにすると、次の関係が得られる。

$$\boldsymbol{v}(\phi) = \phi(\boldsymbol{v})$$

これは、$\boldsymbol{v} \in V$ と $\phi \in V^*$ に対し、

値 $\phi(\boldsymbol{v})$ をとることは、$\boldsymbol{v}$ から見ても ϕ から見ても対等

であることを表している。

この平等さを表すために、次のような記法を使うこともある。

$$\langle \phi, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \phi \rangle = \phi(\boldsymbol{v})$$

この記号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を、双対を表すペアリングと呼ぶ。

双対写像

線形空間の間の線形写像が与えられると、双対空間の間の線形写像を定めることができる。

数ベクトル空間の場合

A を $m \times n$ 型行列とする。

A を左からかけることによって定義される線形写像を f_A とする。

$$\begin{array}{rccc} f_A\colon & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \boldsymbol{v} & \longmapsto & A\boldsymbol{v} \end{array}$$

一方、横ベクトルに A を右からかけることによって定義される線形写像を f_A^* とする。

$$\begin{array}{rccc} f_A^*\colon & {}^t\mathbb{R}^m & \longrightarrow & {}^t\mathbb{R}^n \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \phi & \longmapsto & \phi A \end{array}$$

ここで、横ベクトルの空間を線形汎関数の空間と同一視して、次のように書こう。

$$\begin{array}{rccc} f_A^*\colon & (\mathbb{R}^m)^* & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n)^* \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \phi & \longmapsto & \phi A \end{array}$$

補足：ベクトルと行列の積の次元

n 次元縦ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して A を左からかけたものは、m 次元縦ベクトルとなる。

$$\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times 1}{\boldsymbol{v}} = \underset{m \times 1}{A\boldsymbol{v}}$$

同じ

m 次元横ベクトル $\phi \in {}^t\mathbb{R}^m$ に対して A を右からかけたものは、n 次元横ベクトルとなる。

$$\underset{1 \times m}{\phi} \cdot \underset{m \times n}{A} = \underset{1 \times n}{\phi A}$$

同じ

$\phi \in (\mathbb{R}^m)^*$ は $\mathbb{R}^m$ 上の線形汎関数であるから、次のような関係になる。

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f_A"] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "\phi"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

このとき、合成写像 $\phi \circ f_A$ を考えることができ、その表現行列は $\phi A \in (\mathbb{R}^n)^*$ となる。

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f_A"] \arrow[dr, "\phi \circ f_A"'] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "\phi"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

f_A^* の定義より、ϕA は $f_A^*(\phi)$ と書くことができるから、

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f_A"] \arrow[dr, "f_A^*(\phi)"'] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "\phi"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

ここで、f_A^* は、$\mathbb{R}^m$ 上の線形汎関数 ϕ を入力として、$\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数 $f_A^*(\phi)$ を返す線形写像である。

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f_A"] \arrow[dr, "f_A^*(\phi)"'] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "\phi"] \\ & \mathbb{R} \arrow[ul, bend left, "f_A^*"] \end{tikzcd}$$

補足：f_A^* の線形性

$\phi_1, \phi_2 \in (\mathbb{R}^m)^*$ と $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\begin{aligned} f_A^*(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) &= (c_1\phi_1 + c_2\phi_2)A \\ &= c_1(\phi_1 A) + c_2(\phi_2 A) \\ &= c_1 f_A^*(\phi_1) + c_2 f_A^*(\phi_2) \end{aligned}$$

となるので、f_A^* は線形写像である。

このように、$(\mathbb{R}^m)^*$ から $(\mathbb{R}^n)^*$ への線形写像 f_A^* を、

$$f_A^*(\phi) = \phi \circ f_A$$

として定めることができる。f_A^* を f_A の双対写像という。

$f_A^*(\phi)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ を入力すると、次の関係が導かれる。

$$f_A^*(\phi)(\boldsymbol{v}) = (\phi \circ f_A)(\boldsymbol{v}) = \phi(f_A(\boldsymbol{v}))$$

つまり、$\boldsymbol{v}$ に $f_A^*(\phi)$ を作用させることと、ϕ に $f_A(\boldsymbol{v})$ を作用させることは同じである。

この関係は、ペアリングの記号を用いて書くと対称性がわかりやすい。

theorem – 数ベクトル空間における双対写像とペアリング

$\phi \in (\mathbb{R}^m)^*, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、次の関係が成り立つ。

$$\langle f_A^*(\phi), \boldsymbol{v} \rangle = \langle \phi, f_A(\boldsymbol{v}) \rangle$$

一般の線形空間の場合

一般の線型空間 V, W に対しても、同様に双対写像を定義することができる。

線形空間 V, W の間の線形写像 $f\colon V \to W$ が与えられたとする。
W 上の線形汎関数を $\varphi \in W^*$ とすると、次のような関係になっている。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

このとき、合成写像 $\varphi \circ f$ を考えることができる。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varphi \circ f"'] & W \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

theorem 2.2「線形写像の合成」より、線形写像の合成もまた線形写像になるので、$\varphi \circ f$ は V 上の線形汎関数である。
これを $f^*(\varphi) \in V^*$ と書くことにする。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f^*(\varphi)"'] & W \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

ここで、f^* は、W^* 上の線形汎関数 φ を入力として、V^* 上の線形汎関数 $f^*(\varphi)$ を返す線形写像である。

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & W \arrow[d, "\varphi"] \\
 & \mathbb{R} \arrow[dl, bend left, "f^*"] \\
f^*(\varphi) &
\end{tikzcd}$$

補足：f^* の線形性

$\varphi_1, \varphi_2 \in W^*$ と $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ とする。

φ_1, φ_2 は線形写像であるので、**def 25.1**「線形写像の和とスカラー倍」より、

$$\begin{aligned}
f^*(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)(\boldsymbol{v}) &= (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)f(\boldsymbol{v}) \\
&= c_1\varphi_1(f(\boldsymbol{v})) + c_2\varphi_2(f(\boldsymbol{v})) \\
&= c_1 f^*(\varphi_1)(\boldsymbol{v}) + c_2 f^*(\varphi_2)(\boldsymbol{v})
\end{aligned}$$

となるので、f^* は線形写像である。

ここで、$f^*(\varphi) = \varphi \circ f$ と定義したことから、

$$f^*(\varphi)(\boldsymbol{v}) = (\varphi \circ f)(\boldsymbol{v}) = \varphi(f(\boldsymbol{v}))$$

と書けることを用いている。

このように、W^* から V^* への線形写像 f^* を、

$$f^*(\varphi) = \varphi \circ f$$

として定めることができる。f^* を f の**双対写像**という。

def – 双対写像

V, W を線形空間とし、$f\colon V \to W$ を線形写像とするとき、f の**双対写像** $f^*\colon W^* \to V^*$ を次のように定義する。

$$f^*(\varphi) \coloneqq \varphi \circ f \quad (\varphi \in W^*)$$

$f^*(\varphi)\colon V \to \mathbb{R}$ に $\boldsymbol{v} \in V$ を入力すると、次の関係が導かれる。

$$f^*(\varphi)(\boldsymbol{v}) = (\varphi \circ f)(\boldsymbol{v}) = \varphi(f(\boldsymbol{v}))$$

つまり、$\boldsymbol{v}$ に $f^*(\varphi)$ を作用させることと、φ に $f(\boldsymbol{v})$ を作用させることは同じである。

theorem – 双対写像とペアリング

$\varphi \in W^*, \boldsymbol{v} \in V$ に対して、次の関係が成り立つ。

$$\langle f^*(\varphi), \boldsymbol{v} \rangle = \langle \varphi, f(\boldsymbol{v}) \rangle$$

双対写像の表現行列

双対写像の表現行列は、元の線形写像の表現行列の転置になる。

このことから、双対写像は転置写像とも呼ばれる。

theorem – 双対写像の行列表現

V, W を有限次元の線形空間とし、$f\colon V \to W$ を線型写像とする。また、$\dim V = n, \dim W = m$ とする。

V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$、$W$ の基底 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ を選び、これらの双対基底をそれぞれ $\phi_1, \ldots, \phi_n$、$\psi_1, \ldots, \psi_m$ とする。

このとき、$\{\boldsymbol{v}_i\}$、$\{\boldsymbol{w}_j\}$ に関する f の表現行列を A とすると、$\{\psi_j\}, \{\phi_i\}$ に関する f^* の表現行列は ${}^tA$ によって与えられる。

証明

f の双対写像 f^* は次のように定義される。

$$f^*(\varphi)(\boldsymbol{v}) = \varphi(f(\boldsymbol{v}))$$

表現行列の構成［第 13 章］より、$f\colon V \to W$ の表現行列 A は次のように表される。

$$f(\boldsymbol{v}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\boldsymbol{w}_j \quad (1 \leq i \leq n)$$

したがって、任意の i に対し、

$$\psi_k(f(\boldsymbol{v}_i)) = \psi_k\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\boldsymbol{w}_j\right) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\psi_k(\boldsymbol{w}_j)$$

ここで、$\{\psi_k\}$ は $\{\boldsymbol{w}_j\}$ の双対基底なので、$\psi_k(\boldsymbol{w}_j) = \delta_{kj}$ より、

$$\psi_k(f(\boldsymbol{v}_i)) = a_{ki}$$

また、$f^*(\psi_k) \in V^*$ は V 上の線形汎関数なので、V の双対基底 $\{\phi_i\}$ の線形結合として表せる。

$$f^*(\psi_k) = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\phi_i \quad (1 \leq k \leq m)$$

この係数 b_{ik} を並べた行列を B とすると、B は f^* の表現行列である。

このとき、

$$f^*(\psi_k)(\boldsymbol{v}_i) = \psi_k(f(\boldsymbol{v}_i)) = a_{ki}$$

であり、一方、

$$f^*(\psi_k)(\boldsymbol{v}_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}\phi_j(\boldsymbol{v}_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}\delta_{ij} = b_{ki}$$

でもあるから、$b_{ki} = a_{ki}$ が成り立つ。すなわち、

$$B = {}^tA$$

である。 ■

Zebra Notes

Type	Number
todo	1