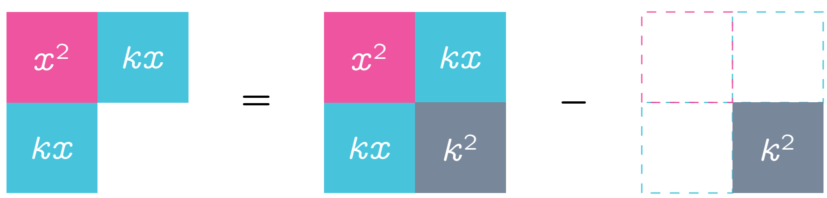
第 30 章

二次形式

二次式の平方完成

乗法公式 $(x+k)^2 = x^2 + 2kx + k^2$ を利用した次の形を、二次式の**平方完成**という

$$(x+k)^2 - k^2 = x^2 - 2kx$$



斉次二次式と行列

2 つの文字 x, y の斉次二次式は、一般に次のように表される

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad (a, b, c \neq 0)$$

この式は、次のように行列の積として表すことができる

$$
\begin{aligned}
ax^2 + 2bxy + cy^2 &= ax^2 + byx + bxy + cy^2 \\
&= (ax + by)x + (bx + cy)y \\
&= \begin{pmatrix} ax + by & bx + cy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

すなわち、

$$
A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
$$

とおくと、

$$
ax^2 + 2bxy + cy^2 = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}
$$

ここで、A は実対称行列になっている

このような斉次二次式を一般化したものが、n 個の文字 $x_1, \ldots, x_n$ についての二次形式である

二次形式

n 個の変数 $x_1, \ldots, x_n$ の斉次二次式を二次形式という

各項の係数を a_{ij} とすると、一般の二次形式（n 変数斉次二次式）は次のように書くことができる

$$
Q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j
$$

ここで、各変数は可変、すなわち $x_ix_j = x_jx_i$ であるので、$i \neq j$ の場合は、$i < j$ を満たす項だけの和として書き、それを 2 倍している

あえて展開して書くと、次のようになる

$$
Q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_{ii}x_{ii} + \sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i<j} a_{ji}x_jx_i
$$

$i < j$ においては $x_i x_j = x_j x_i$ であり、その係数についても $a_{ij} = a_{ji}$ が成り立つので、行列 $A = (a_{ij})$ は対称行列である

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ii} & (i = j) \\ a_{ij} = a_{ji} & (i < j) \end{cases}$$

このように a_{ij} を定めた上で、$\sum$ を 1 つにまとめることができる

$$Q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

def - 二次形式の係数行列

二次形式は対称行列 $A = (a_{ij})$ によって、次のように表される

$$Q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

このとき、A を二次形式 $Q(\boldsymbol{x})$ の係数行列という

i が A の行番号、j が列番号であるので、x_i は横ベクトル、x_j は縦ベクトルの成分である

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} x_j \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

そこで、$\boldsymbol{x}$ を縦ベクトルとみるとき、二次形式 $Q(\boldsymbol{x})$ とその係数行列は次のような関係にある

$$Q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{x}$$

この関係を用いて、任意の対称行列 A から二次形式を作ることができる

$Q(\boldsymbol{x})$ から A を作り、A から $Q(\boldsymbol{x})$ を作ることができるので、n 変数の二次形式 $Q(\boldsymbol{x})$ と n 次の対称行列 A は対応し、さらにこの対応は一対一である

実二次形式の標準化

A が実対称行列であることから、A は適当な直交行列 P を用いて対角化できる

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

与えられた二次形式 $Q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ に対して、$\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$、すなわち $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ という変数の変換を行うと、

$$\begin{aligned} {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} &= {}^t(P\boldsymbol{y})A(P\boldsymbol{y}) \\ &= {}^t\boldsymbol{y}{}^tPAP\boldsymbol{y} \\ &= {}^t\boldsymbol{y}(P^{-1}AP)\boldsymbol{y} \\ &= {}^t\boldsymbol{y}B\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

直交行列の定義 ${}^tP = P^{-1}$

となるので、変数 $\boldsymbol{y}$ に関する係数行列は $B = P^{-1}AP$ である

B の形から、実際に ${}^t\boldsymbol{y}B\boldsymbol{y}$ を計算してみると、

$$\begin{aligned} {}^t\boldsymbol{y}B\boldsymbol{y} &= \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1 y_1^2 + \cdots + \alpha_n y_n^2 \end{aligned}$$

となり、交叉項 $y_i y_j\ (i \neq j)$ が現れない形に書き換わったことがわかる

このような交叉項のない形を実二次形式の標準形という

⚓ theorem – 実二次形式の直交対角化と標準形

実二次形式 $Q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ に対して、A を対角化する直交行列 P による座標変換 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ を行えば、

$$Q(\boldsymbol{x}) = \alpha_1 y_1^2 + \cdots + \alpha_n y_n^2$$

という、変数 $\boldsymbol{y}$ に関する交叉項のない形（実二次形式の標準形）にできる

ここで、$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ は重複を含めて A の固有値と一致する