第 23 章

直交補空間と射影行列

直交補空間

内積を導入したことで、ベクトルの長さや直交性が利用できるようになった。

直交性は、ベクトルだけでなく、部分空間に対しても拡張できる。

計量空間の部分空間に直交するベクトルの集合を、直交補空間という。

def - 直交補空間

計量空間 V の部分空間 W に対し、W の直交補空間 $W^{\perp}$ を次のように定義する。

$$W^{\perp} := \{\boldsymbol{v} \in V \mid \forall \boldsymbol{w} \in W, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0\}$$

直交補空間は V の部分空間

直交補空間もまた、計量空間の部分空間になっている。

theorem - 直交補空間の部分空間性

計量空間 V の部分空間 W の直交補空間 $W^{\perp}$ は、計量空間 V の部分空間である。

証明

和について

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in W^\perp$ とすると、任意の $\boldsymbol{b} \in W$ に対して、

$$(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) = 0 + 0 = 0$$

となるので、$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 \in W^\perp$ である。 ■

スカラー倍について

$\boldsymbol{a} \in W^\perp$ とすると、任意のスカラー $c \in K$ と任意の $\boldsymbol{b} \in W$ に対して、

$$(c\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = c(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = c \cdot 0 = 0$$

となるので、$c\boldsymbol{a} \in W^\perp$ である。 ■

直交補空間による直和分解

「直交補空間」という名前は、「補集合」と同様に、何らかの集合を補う集合であることを想起させる。

実際、直交補空間 $W^\perp$ は、もとの集合 W を補い、V 全体を構成するような性質を持つ。

theorem – 直交補空間を用いた計量空間の分解

計量空間 V の部分空間 W に対して、

$$V = W + W^\perp$$

証明

$W = \{\boldsymbol{o}\}$ の場合は、任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $\boldsymbol{o}$ との内積は 0 になることから、$W^\perp$ は V 全体となる。

$$W^\perp = \{\boldsymbol{v} \in V \mid (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{o}) = 0\} = V$$

よって、

$$V = W + W^\perp = \{\boldsymbol{o}\} + V = V$$

が成り立つ。

以降、$W \neq \{\boldsymbol{o}\}$ とする。
W の基底 $\{\boldsymbol{w}'_1, \ldots, \boldsymbol{w}'_k\}$ を 1 つとり、これに対してグラム・シュミットの直交化法を適用して、正規直交基底 $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k\}$ を得る。

任意の $\boldsymbol{v} \in V$ をとり、次のようにおく。

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} - \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i)\boldsymbol{w}_i$$

$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{w}_i$ の内積を計算すると、

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_i) &= \left(\boldsymbol{v} - \sum_{j=1}^{k} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_j)\boldsymbol{w}_j, \boldsymbol{w}_i\right) \\
&= (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i) - \sum_{j=1}^{k} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_j)(\boldsymbol{w}_j, \boldsymbol{w}_i) \\
&= (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i) - \sum_{j=1}^{k} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_j)\delta_{ij} \\
&= (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i) - (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i) \\
&= 0
\end{aligned}$$

このように、任意の $i = 1, \ldots, k$ に対して、$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{w}_i$ の内積が 0 になることから、$\boldsymbol{u} \in W^\perp$ である。

一方、$\boldsymbol{u}$ の定義式を $\boldsymbol{v}$ を表す式として整理すると、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i)\boldsymbol{w}_i$$

となるが、$\boldsymbol{w}_i$ が W の正規直交基底であることから、

$$\sum_{i=1}^{k}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i)\boldsymbol{w}_i$$

の部分は、W の任意の元を表す。

よって、V の任意の元 $\boldsymbol{v}$ は、W の元と $W^\perp$ の元 $\boldsymbol{u}$ の和として表されるので、

$$V = W + W^\perp$$

が成り立つ。 ■

さらに、次の定理が成り立つことで、**def 18.1「直和分解」**より、単なる空間の和ではなく、直和として分解できることがわかる。

theorem - 直交補空間との交わり

計量空間 V の部分空間 W に対して、

$$W \cap W^\perp = \{\boldsymbol{o}\}$$

証明

$\boldsymbol{a} \in W \cap W^\perp$ とすると、$\boldsymbol{a} \in W$ かつ $\boldsymbol{a} \in W^\perp$ である。
$\boldsymbol{a} \in W^\perp$ より、$\boldsymbol{a} \in W$ に対しても内積が 0 になるので、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$$

ここで、内積の性質より、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \|\boldsymbol{a}\|^2 \geq 0$$

であり、等号が成立するのは、$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ のときのみである。
よって、$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ である。

零ベクトルは任意のベクトルと直交し（内積が 0 になり）、また任意の部分空間に属するので、明らかに $\boldsymbol{o} \in W \cap W^\perp$ である。

$\boldsymbol{a}$ は $W \cap W^{\perp}$ の任意の元であり、$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o} \in W \cap W^{\perp}$ であることがわかったので、

$$W \cap W^{\perp} = \{\boldsymbol{o}\}$$

がいえる。 ■

こうして、次の両方が成り立つことから、

i. $V = W + W^{\perp}$
ii. $W \cap W^{\perp} = \{\boldsymbol{o}\}$

theorem 18.2「直和分解の同値条件」より、計量空間 V は部分空間 W とその直交補空間 $W^{\perp}$ の直和として分解できる。

よって、theorem 18.3「直和の次元」より、次の定理が従う。

theorem - 直交補空間と次元

計量空間 V の部分空間 W に対して、

$$\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}$$

直交補空間の性質

直交補空間の直交補空間はもとの空間

theorem 23.1 - 部分空間の双直交補と元空間の一致

計量空間 V の部分空間 W に対して、次が成り立つ。

$$(W^{\perp})^{\perp} = W$$

証明

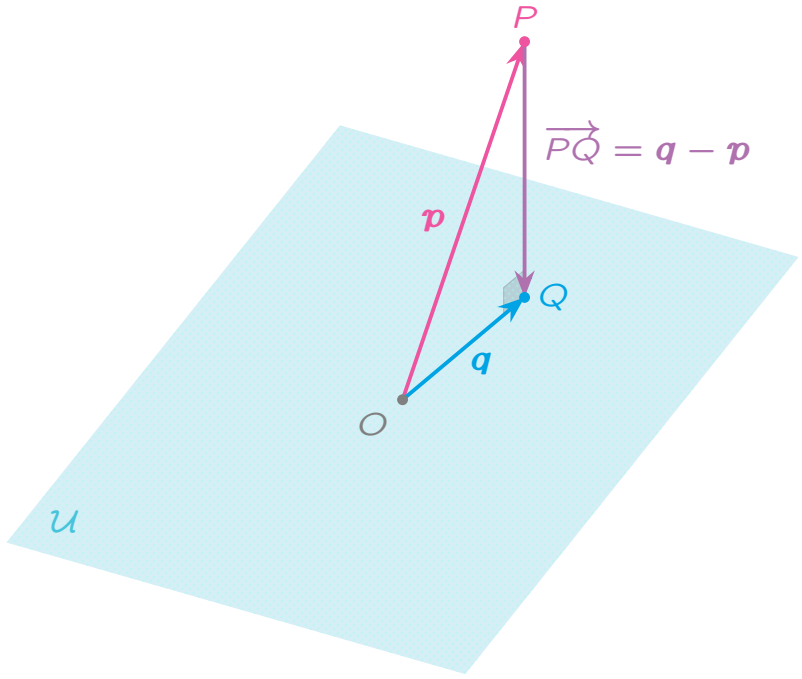
[Todo 1:]

直交射影と反射影

$\mathbb{R}^n$ 上の点 P に対して、部分空間 $\mathcal{U}$ 上の点 $Q \in \mathcal{U}$ のうち、$\overrightarrow{PQ}$ が $\mathcal{U}$ に直交するような点 Q を、点 P の $\mathcal{U}$ への直交射影あるいは正射影という

また、$\overrightarrow{QP}$ を点 Q の $\mathcal{U}$ からの反射影という

射影前のベクトルを $\boldsymbol{p}$、射影後のベクトルを $\boldsymbol{q}$ とすると、直交射影とは、$\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$ が直交するように射影することである



このとき、次のような関係が成り立っている

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$$
$$\overrightarrow{OQ} \in \mathcal{U}, \quad \overrightarrow{QP} \in \mathcal{U}^{\perp}$$

ここで、$\mathcal{U}^{\perp}$ は部分空間 $\mathcal{U}$ に直交するベクトルの全体であり、$\mathcal{U}$ の直交補空間と呼ばれる

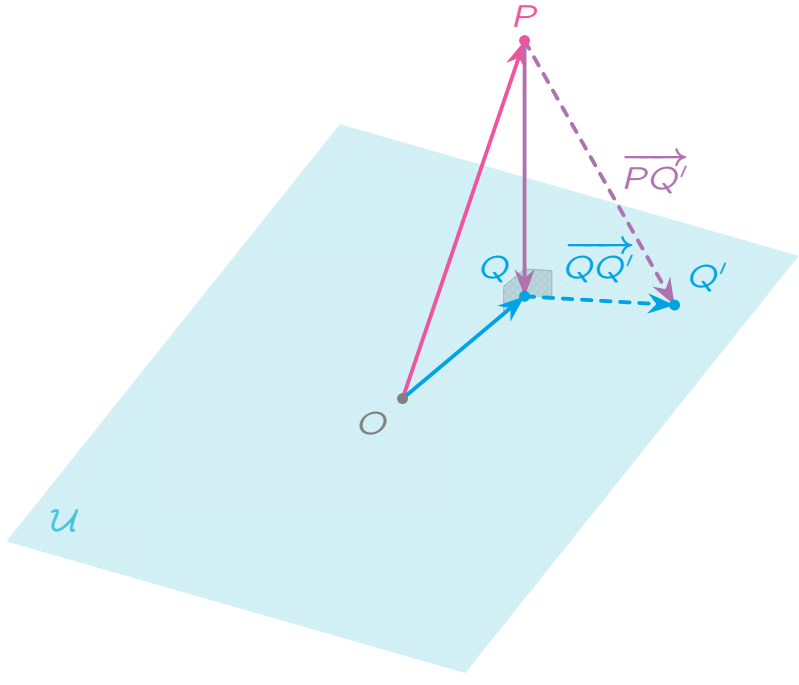
$\mathbb{R}^n$ の部分空間 $\mathcal{U}$ の直交補空間 $\mathcal{U}^{\perp}$ も、$\mathbb{R}^n$ の部分空間となる

$\overrightarrow{OP}$ は $\mathbb{R}^n$ の任意のベクトルを表すことから、$\mathbb{R}^n$ のベクトルは、$\mathcal{U}$ への射影 $\overrightarrow{OQ}$ と、$\mathcal{U}$ からの反射影 $\overrightarrow{QP}$ の和として表されることがわかる

このような表し方は一意的であり、$\overrightarrow{OP}$ の $\mathcal{U}$ と $\mathcal{U}^\perp$ への直和分解という

直交射影と最短距離

点 Q を $\mathcal{U}$ 上の別の点 Q' に移動した場合を考える



このとき、三平方の定理より、

$$\|\overrightarrow{PQ'}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2 + \|\overrightarrow{QQ'}\|^2 > \|\overrightarrow{PQ}\|^2$$

となるから、

直交射影した点 Q は、

点 P から最短となる $\mathcal{U}$ 上の点

であることがわかる

射影行列

ベクトルの射影の概念は、射影行列を用いて表現できる。

任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は、$\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$、$\boldsymbol{u}^\perp \in \mathcal{U}^\perp$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^\perp$$

と一意的に分解できる（直和分解）。

ここで、$\boldsymbol{x}$ の $\mathcal{U}$ への射影を表すのは、$\boldsymbol{u}$ である。
つまり、$\mathcal{U}$ への射影とは $\boldsymbol{x}$ のうち、$\mathcal{U}$ に含まれる成分 $\boldsymbol{u}$ だけを取り出す操作といえる。
そこで、部分空間 $\mathcal{U}$ へ射影する写像を $P_\mathcal{U}$ とすると、

$$P_\mathcal{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$$

という、「$\boldsymbol{x}$ に $P_\mathcal{U}$ を作用させると $\boldsymbol{u}$ だけが残る」という形で書ける。

部分空間への射影

このとき、$\boldsymbol{x}$ がもともと $\mathcal{U}$ の元である場合は、$\boldsymbol{u}^\perp = \boldsymbol{o}$ の場合と考えて、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{u}$$

つまり、射影しても変わらないので、

$$P_\mathcal{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U})$$

である。

一方、$\boldsymbol{x}$ が $\mathcal{U}$ の直交補空間 $\mathcal{U}^\perp$ の元の場合は、$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ の場合と考えて、

$$P_\mathcal{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}^\perp)$$

となる。

以上をまとめると、次のように書ける。

$$P_\mathcal{U}\boldsymbol{x} = \begin{cases} \boldsymbol{x} & (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}) \\ \boldsymbol{o} & (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}^\perp) \end{cases}$$

同様に、直交補空間 $\mathcal{U}^\perp$ へ射影する写像を $P_{\mathcal{U}^\perp}$ とした場合、

$$P_{\mathcal{U}^\perp}\boldsymbol{x} = \begin{cases} \boldsymbol{o} & (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}) \\ \boldsymbol{x} & (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}^\perp) \end{cases}$$

とまとめられる。

射影行列の展開

$\mathbb{R}^n$ が $\mathcal{U}$ と $\mathcal{U}^\perp$ の直和に分解されることから、theorem 18.4「直和の基底」より、$\mathbb{R}^n$ の基底は $\mathcal{U}$ の基底と $\mathcal{U}^\perp$ の基底を合わせたものになる。

そこで、部分空間 $\mathcal{U}$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r\}$ を選ぶと、これを $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ に拡張できる。
ここで、$\{\boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ は $\mathcal{U}^\perp$ の正規直交基底になる。

このとき、

$$P_{\mathcal{U}}\boldsymbol{x} = \begin{cases} \boldsymbol{x} & (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}) \\ \boldsymbol{o} & (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}^\perp) \end{cases}$$

という式は、$P_{\mathcal{U}}$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底

$$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$$

を、それぞれ次のように写像することを意味する。

$$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{o}, \ldots, \boldsymbol{o}\}$$

同様に、

$$P_{\mathcal{U}^\perp}\boldsymbol{x} = \begin{cases} \boldsymbol{o} & (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}) \\ \boldsymbol{x} & (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}^\perp) \end{cases}$$

という式は、$P_{\mathcal{U}^\perp}$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底

$$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$$

を、それぞれ次のように写像することを意味する。

$$\{\boldsymbol{o}, \ldots, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$$

ゆえに、**theorem 14.2**「正規直交基底による表現行列の展開」より、$P_{\mathcal{U}}$ と $P_{\mathcal{U}^\perp}$ は次のように表現できる。

$$
\begin{aligned}
P_{\mathcal{U}} &= \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^\top + \cdots + \boldsymbol{u}_r\boldsymbol{u}_r^\top \\
P_{\mathcal{U}^\perp} &= \boldsymbol{u}_{r+1}\boldsymbol{u}_{r+1}^\top + \cdots + \boldsymbol{u}_n\boldsymbol{u}_n^\top
\end{aligned}
$$

$P_{\mathcal{U}}$ と $P_{\mathcal{U}^\perp}$ をそれぞれ、部分空間 $\mathcal{U}$、およびその直交補空間 $\mathcal{U}^\perp$ への射影行列と呼ぶ。

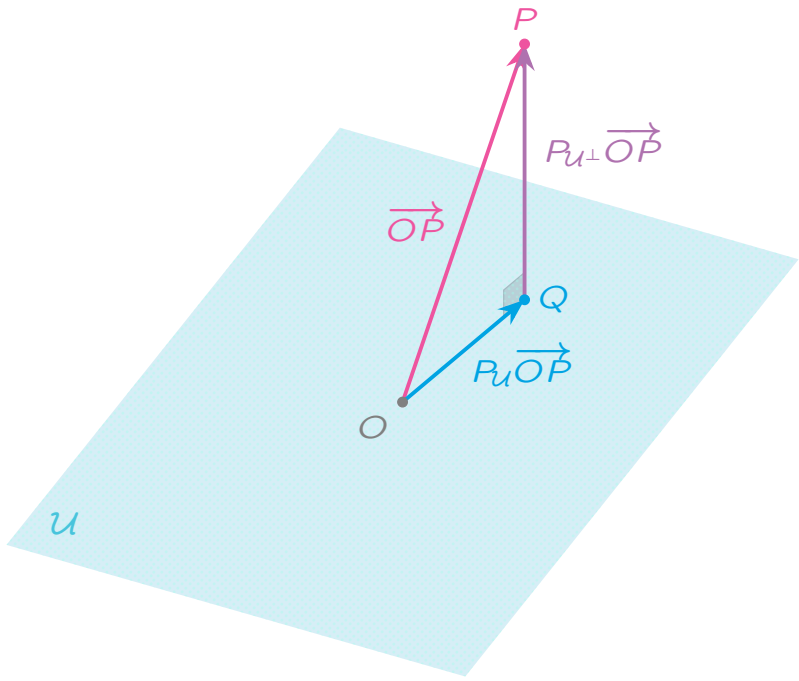
単位行列の射影行列への分解

直交射影と反射影［第 23 章］で示した、

$$
\begin{gathered}
\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} \\
\overrightarrow{OQ} \in \mathcal{U}, \quad \overrightarrow{QP} \in \mathcal{U}^\perp
\end{gathered}
$$

という関係は、射影行列を用いて、次のようにも表せる

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} &= P_{\mathcal{U}}\overrightarrow{OP} + P_{\mathcal{U}^\perp}\overrightarrow{OP} \\
&= (P_{\mathcal{U}} + P_{\mathcal{U}^\perp})\overrightarrow{OP}
\end{aligned}
$$



$\mathbb{R}^n$ 内のすべての点 P に対して、$\overrightarrow{OP} = (P_{\mathcal{U}} + P_{\mathcal{U}^\perp})\overrightarrow{OP}$ が成り立つことから、

$$
P_{\mathcal{U}} + P_{\mathcal{U}^\perp} = E
$$

が成り立っている

これはすなわち、単位行列 E が、部分空間 $\mathcal{U}$ その直交補空間 $\mathcal{U}^\perp$ への射影行列の和に分解できることを意味する

$$E = \underbrace{\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^\top + \cdots + \boldsymbol{u}_r\boldsymbol{u}_r^\top}_{P_\mathcal{U}} + \underbrace{\boldsymbol{u}_{r+1}\boldsymbol{u}_{r+1}^\top + \cdots + \boldsymbol{u}_n\boldsymbol{u}_n^\top}_{P_{\mathcal{U}^\perp}}$$

この式により、単位行列 E 自体を、空間全体 $\mathbb{R}^n$ への射影行列と考えることもできる

射影行列とノルム

$P_\mathcal{U}\overrightarrow{OP}$ と $P_{\mathcal{U}^\perp}\overrightarrow{OP}$ は直交するから、三平方の定理より、

$$\|\overrightarrow{OP}\|^2 = \|P_\mathcal{U}\overrightarrow{OP}\|^2 + \|P_{\mathcal{U}^\perp}\overrightarrow{OP}\|^2$$

がいえる

ゆえに、任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OP}$ に対して、

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \|P_\mathcal{U}\boldsymbol{x}\|^2 + \|P_{\mathcal{U}^\perp}\boldsymbol{x}\|^2$$

が成り立つ

射影行列の冪等性と対称性

「一度射影した点をもう一度射影しても変化しない」という性質は、次のような数式として表現できる

⚓ **theorem** – 射影行列の冪等性

射影行列 $P_\mathcal{U}$ は冪等である

$$P_\mathcal{U}^2 = P_\mathcal{U}$$

証明

$$
\begin{aligned}
P_{\mathcal{U}}^2 &= \left(\sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^\top\right) \left(\sum_{j=1}^{r} \boldsymbol{u}_j \boldsymbol{u}_j^\top\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^\top \boldsymbol{u}_j \boldsymbol{u}_j^\top \\
&= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \boldsymbol{u}_i (\boldsymbol{u}_i^\top \boldsymbol{u}_j) \boldsymbol{u}_j^\top \\
&= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \delta_{ij} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_j^\top
\end{aligned}
$$

ここで、δ_{ij} を含むことから、$i = j$ の場合のみ項が残り、

$$
P_{\mathcal{U}}^2 = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^\top = P_{\mathcal{U}}
$$

が得られる ■

この $P_{\mathcal{U}}^2 = P_{\mathcal{U}}$ という式は、一般の（必ずしも直交射影でない）射影の定義として用いられる

次の性質は、射影が直交射影であることを示すものである

theorem – 射影行列の対称性

射影行列 $P_{\mathcal{U}}$ は、対称行列である

$$
P_{\mathcal{U}}^\top = P_{\mathcal{U}}
$$

証明

$$
P_{\mathcal{U}}^\top = \left(\sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^\top\right)^\top
$$

theorem 2.5「行列の和に対する転置の分配性」より、和の転置は転置の和であることを用いて、

$$P_{\mathcal{U}}^{\top} = \sum_{i=1}^{r} (\boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^{\top})^{\top}$$

また、theorem 2.4「転置と行列積の順序反転性」より、積の転置は転置の積だが、積の順序が入れ替わることに注意して、

$$P_{\mathcal{U}}^{\top} = \sum_{i=1}^{r} (\boldsymbol{u}_i^{\top})^{\top} \boldsymbol{u}_i^{\top}$$

theorem 2.3「転置操作の反復不変性」より、転置の転置をとると元に戻るので、

$$P_{\mathcal{U}}^{\top} = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^{\top} = P_{\mathcal{U}}$$

が得られる ■

射影行列は冪等かつ対称であるが、その逆も成り立つ

theorem – 対称性と冪等性による射影行列の特徴づけ

対称かつ冪等な行列は、ある部分空間への射影行列となる

証明

theorem 20.9「エルミート行列の固有値の実数性」より、n 次対称行列 P は、n 個の実数の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を持つ

これらに属する固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ とすると、theorem 20.10「エルミート行列の固有値の直交性」より、$\boldsymbol{u}_i$ は互いに直交する

固有値と固有ベクトルの関係から、

$$P\boldsymbol{u}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i$$

両辺に左から P をかけると、

$$P^2\boldsymbol{u}_i = \lambda_i P\boldsymbol{u}_i = \lambda_i \cdot \lambda_i \boldsymbol{u}_i = \lambda_i^2 \boldsymbol{u}_i$$
$$\therefore \quad P^2\boldsymbol{u}_i = \lambda_i^2 \boldsymbol{u}_i$$

ここで、P は冪等なので、$P^2 = P$ が成り立つ

$$P^2\boldsymbol{u}_i = P\boldsymbol{u}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i$$

これを用いると、

$$\lambda_i \boldsymbol{u}_i = \lambda_i^2 \boldsymbol{u}_i$$

固有ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ は零ベクトルではないので、

$$\lambda_i = \lambda_i^2$$

よって、

$$\begin{aligned} \lambda_i^2 - \lambda_i &= 0 \\ \lambda_i(\lambda_i - 1) &= 0 \\ \lambda_i &= 0, 1 \end{aligned}$$

すなわち、固有値は 0 か 1 のいずれかである

そこで、

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \cdots = \lambda_r &= 1 \\ \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n &= 0 \end{aligned}$$

とおくと、

$$P\boldsymbol{u}_i = \begin{cases} \boldsymbol{u}_i & (i = 1, \ldots, r) \\ 0 & (i = r+1, \ldots, n) \end{cases}$$

よって、P は $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r\}$ の張る部分空間への射影行列である ■

Zebra Notes

Type	Number
todo	1