付録 A

写像と集合

関数から写像へ

関数は、数を入力すると数が出力される装置であり、入力した数に「対応」する数を決める規則である。

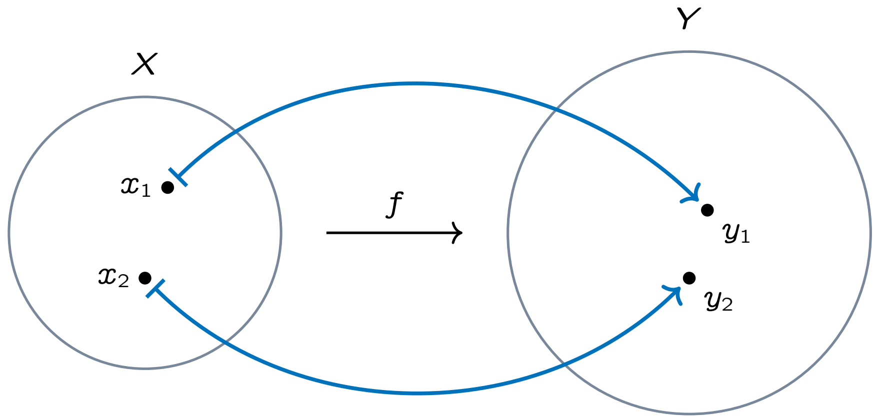
このような「対応」という考え方の対象を「数」に限定せず、「集合の要素（元）」に一般化したものを写像という。

def – 写像

集合 X, Y があったとき、X のすべての要素 x に対して、Y のある要素 y をただ一つ対応させる規則 f が与えられたとする。

このとき、f を X から Y への写像といい、次のように表す。

$$f: X \to Y$$



写像による像

写像 f により、X の要素 x が Y の要素 y に対応しているとき、

- y は x の f による像である
- f により x は y に写る

というような言い回しが使われる。

このとき、関数と同じように、次のように書くことがある。

$$f(x) = y$$

集合の対応と集合の元の対応

集合の対応を表すには $\rightarrow$ を使い、集合の元の対応を表すには $\mapsto$ を使う。

$x \in X$ が $y \in Y$ に対応するとき、次のように書くことがある。

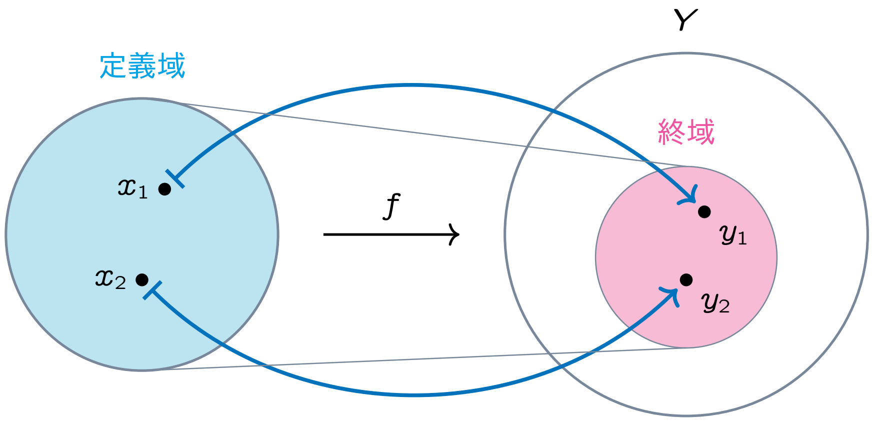
$$\begin{array}{cccc} f: & X & \longrightarrow & Y \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & y \end{array}$$

定義域と終域

写像では、「どの集合からどの集合への対応であるか」を明示しておかなければならない。

def – 写像の定義域と終域

写像 $f\colon X \to Y$ において、集合 X を f の定義域という。また、$x \in X$ に対応する $y \in Y$ の集合は、Y の部分集合であり、これを f の終域という。

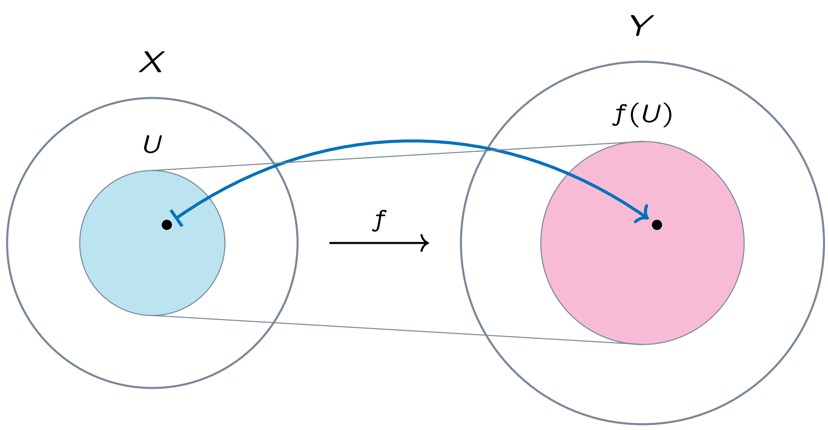


像と逆像

def – 部分集合の像

写像 $f\colon X \to Y$ が与えられたとき、X の部分集合 U に対し、$x \in U$ を f で写したものの集合を U の像という。

$$f(U) = \{f(x) \mid x \in U\} \subset Y$$

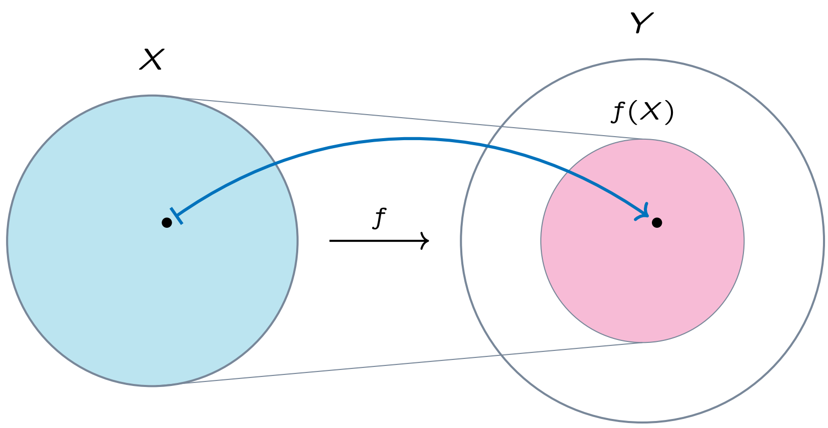


$X = U$ の場合、X の像は f の像と呼ばれる。

def - 写像の像

写像 $f\colon X \to Y$ が与えられたとき、$x \in X$ を f で写したものの集合を f の**像**という。

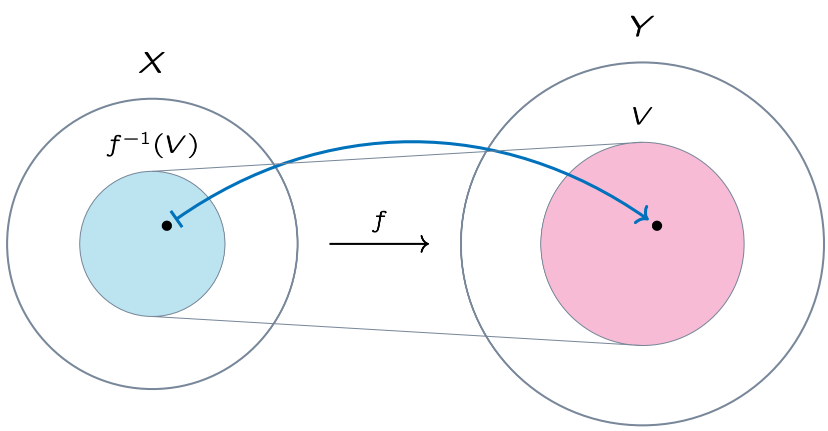
$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subset Y$$



def - 部分集合の逆像

写像 $f\colon X \to Y$ が与えられたとき、Y の部分集合 V に対し、f によって V の元に写るような $x \in X$ の集合を V の**逆像**という。

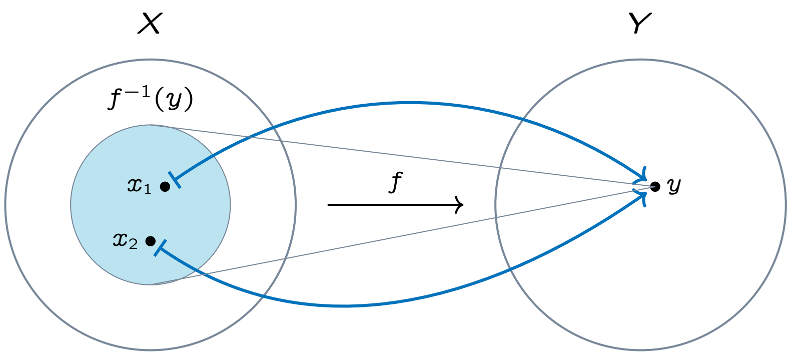
$$f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\} \subset X$$



def A.1 - 終域の元の逆像

写像 $f\colon X \to Y$ が与えられたとき、Y の元 y に対し、f によって y に写るような $x \in X$ の集合を y の逆像という。

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\} \subset X$$



単射と全射

写像の性質として、次の 2 点が重要になる。

i. 異なる 2 元を写して同じ元になるか？
ii. 終域のどんな元も、定義域の元になるか？（y に写るような x があるか？）

これら 2 つの視点から、単射と全射が定義される。

i. 「異なる元は異なる元に写る」という性質を満たすとき、写像は単射であるという。
ii. 「どんな y も X の元の像となる」という性質を満たすとき、写像は全射であるという。

単射の定義とイメージ

def – 単射

写像 $f\colon X \to Y$ が単射であるとは、X の任意の要素 x_1, x_2 に対して、次が成り立つことをいう。

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

この条件の対偶をとると、

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

となる。つまり、単射であるということは、

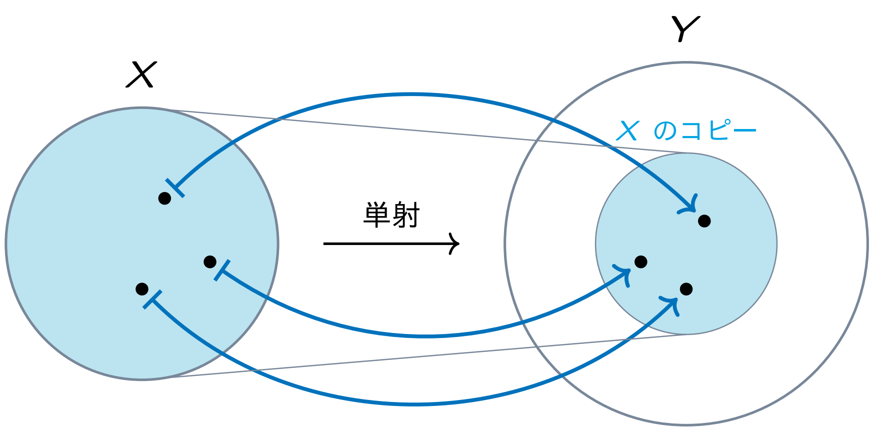
異なる元が f によって同じ元に対応することはない

ということにほかならない。

これは、元々の集合の元が、f で写しても他の元と重なってしまうようなことはない、ということを意味する。情報が失われることなく、すべての元がそのまま写るので、

単射な写像は、定義域を終域の中にそっくり「コピーする」

と考えることができる。



また、単射は def A.1「終域の元の逆像」を用いて定義することもできる。

def – 単射（逆像による定義）

写像 $f: X \to Y$ が単射であるとは、任意の $y \in Y$ に対し、逆像 $f^{-1}(y)$ の元の個数が 1 以下であることをいう。

y の逆像は、f によって y に写るような $x \in X$ の集合である。

この定義でも、同じ y に写るような x がただ一つしかない（もしくは存在しない）ことが単射だと述べている。

全射の定義とイメージ

def - 全射

写像 $f\colon X \to Y$ が全射であるとは、f の像 $f(X)$ が Y に一致することをいう。

$$f(X) = Y$$

X から Y への写像 f が全射であるとは、

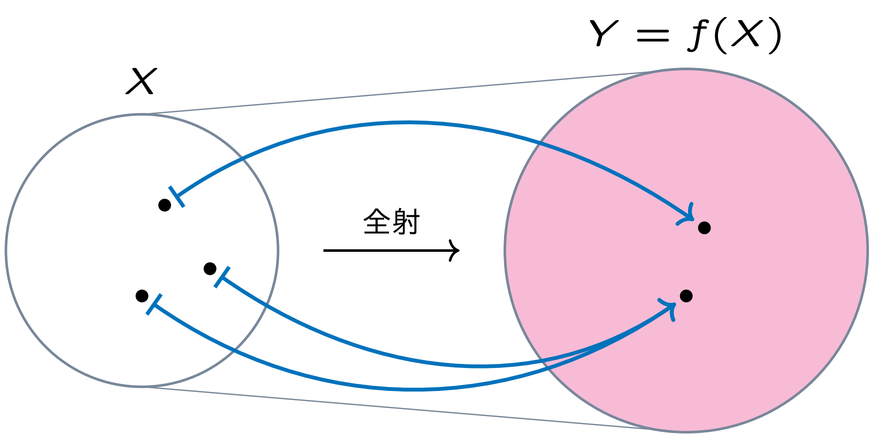
> Y のすべての元が、X のある元の像となる

ということを意味する。

つまり、

> 全射な写像は、定義域の元の像で終域を「埋め尽くす」

と考えることができる。



全単射と一対一対応

[Placeholder 1: 再編予定（book: 線形代数の世界 p23）]

def - 全単射

写像 f が全単射であるとは、f が単射かつ全射であることをいう。

単射と全射は、それぞれ次の条件を満たす性質だった。

- 単射：y に写るような x はただ一つしかない（異なる元は異なる元に写る）
- 全射：どんな y も X の元の像 x になる（すべての元に漏れなく写る）

これらの両方を満たす性質である全単射は、次のような性質だといえる。

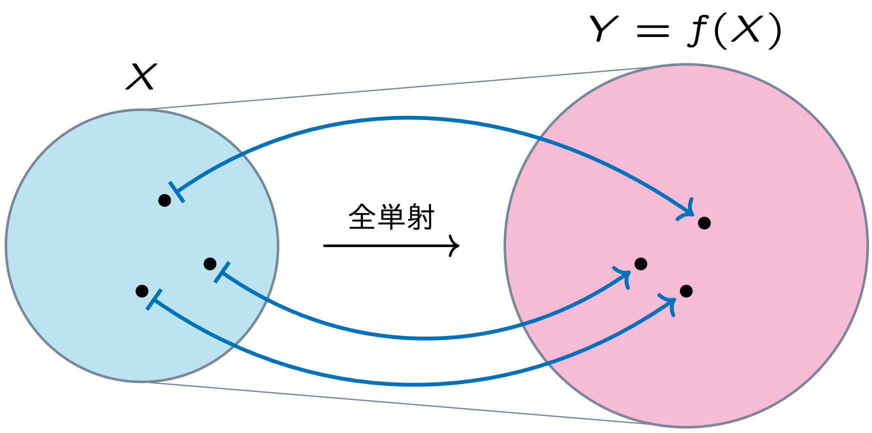
どんな y も、x に対するただ一つの像となる

単射は「X のコピーを Y の中に作る」ことだった。

さらに全射でもあれば、「X のコピーは Y に一致する」ことになる。

そのため、X と Y の間の写像 f が全単射であれば、X と Y を同一視する（同じ集合とみなす）という考え方も成り立つ。

全単射な写像 f により、X の元と Y の元は一対一に対応する



恒等写像と包含写像

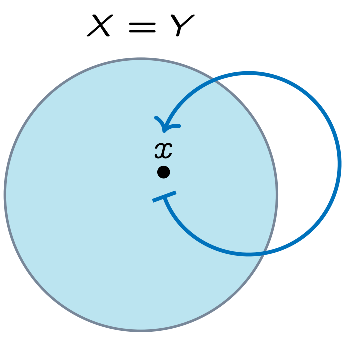
自分自身に対応させる写像は、次のように書ける。

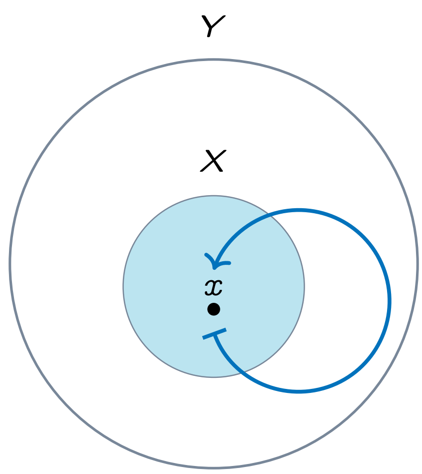
$$f(x) = x$$

この場合、f によって x が y に変わるようなことはなく、f は x をそのまま写す（何も変えない）。

任意の $x \in X$ に対して、$f(x) = x$ が成り立ち、かつ $f(x) \in Y$ を満たすような状況は、次の 2 通りが考えられる。

- $X = Y$ の場合（左図）を**恒等写像**（`identity map`）という。
- $X \subset Y$ の場合（右図）を**包含写像**（`inclusion map`）という。





def – 恒等写像

集合 X に対して、X の任意の元 x を $x \in X$ に対応させる X から X への写像を X 上の**恒等写像**といい、id_X あるいは単に id と表す。

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}_X : & X & \longrightarrow & X \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

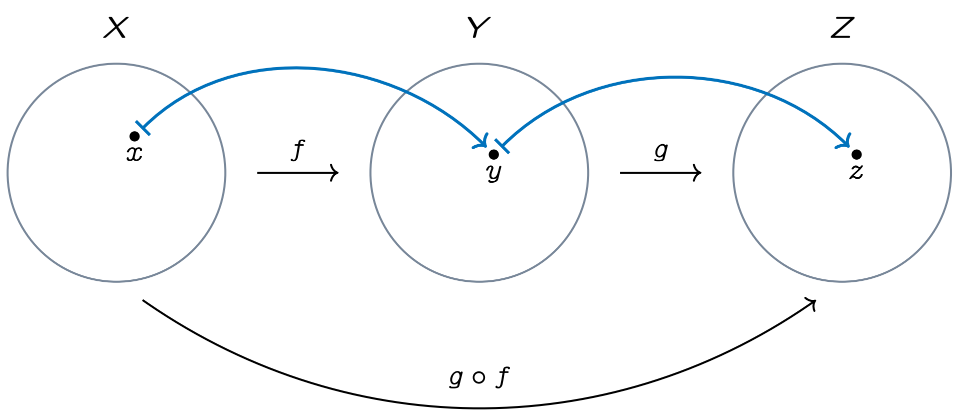
def – 包含写像

定義域 X が終域 Y の部分集合のとき、X の任意の元 x を $x \in Y$ に対応させる写像を**包含写像**といい、ι と表す。

$$\begin{array}{rccc} \iota : & X & \longrightarrow & Y \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

合成写像

対応づける操作を続けて行うことは、写像の**合成**として定義される。



def - 合成写像

2 つの写像 $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$ が与えられたとき、X の元に対して Z の元を対応させる X から Z への写像を f と g の合成写像といい、$g \circ f$ と表す。

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

単射な写像の合成

[Todo 1: 単射な写像の合成は単射である]

全射な写像の合成

[Todo 2: 全射な写像の合成は全射である]

逆写像と可逆な写像

全単射な写像では、終域のどんな元も、定義域のただ 1 つの元の像となっている。

そのため、終域の元からその像になるような定義域の元をただ 1 つ決めることができる。

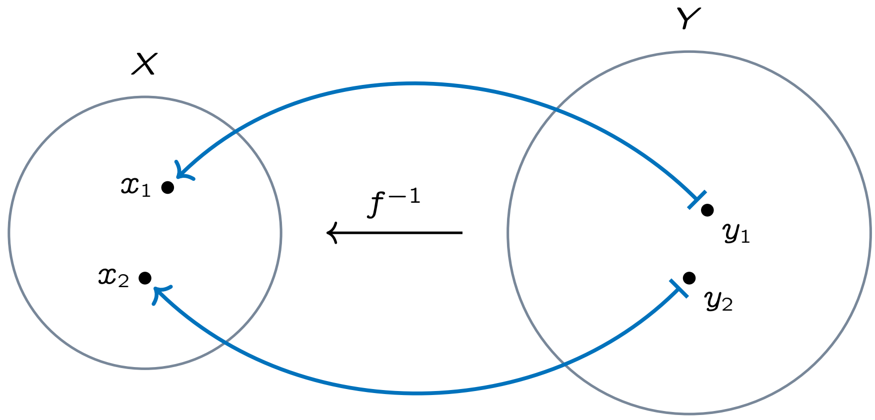
この対応は、元々の写像の終域から定義域への写像となり、逆写像と呼ばれる。

def - 逆写像

写像 $f\colon X \to Y$ が全単射であるとき、任意の $y \in Y$ に対して、$f(x) = y$ となる $x \in X$ がただ一つ存在する。

このとき、Y の元 y に対して、$f(x) = y$ となる x を対応させる写像を f の逆写像（`inverse mapping`）といい、次のように表す。

$$f^{-1}\colon Y \to X$$



🎓 def – 可逆

写像 $f\colon X \to Y$ の逆写像が存在するとき、f は可逆（invertible）であるという。

逆写像を定義する上での前提は、写像が全単射であることだったため、

可逆な写像とは、全単射な写像

のことをいう。

また、逆写像は恒等写像によって定義することもできる。

そのための議論を次に行う。

左逆写像と右逆写像

f で写した後に g を適用すると元に戻るとき、g は f の左逆写像と呼ばれる。

🎓 def – 左逆写像

写像 $f\colon X \to Y$ に対して、写像 $g\colon Y \to X$ が存在して、

$$g \circ f = \mathrm{id}_X$$

を満たすとき、g は f の左逆写像であるという。

集合レベルでの左逆写像

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd}$$

要素レベルでの左逆写像

$$x \xmapsto{f} f(x) \xmapsto{g} x$$

g で戻した後に f を適用すると元に戻るとき、g は f の右逆写像と呼ばれる。

def - 右逆写像

写像 $f\colon X \to Y$ に対して、写像 $g\colon Y \to X$ が存在して、

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

を満たすとき、g は f の右逆写像であるという。

集合レベルでの右逆写像

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_Y"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

要素レベルでの右逆写像

$$y \xmapsto{g} g(y) \xmapsto{f} y$$

全単射の特徴づけ

theorem - 全単射と逆写像の存在

写像 $f\colon X \to Y$ に対して、次の 2 つは同値である。

i. f は全単射である

ii. f の左逆写像であり、右逆写像でもある写像 $g\colon Y \to X$ が存在する

証明

[Todo 3: book: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p62]

逆写像は、次のように定義することもできる。

🎓 def – 逆写像（恒等写像による定義）

写像 $g\colon Y \to X$ が写像 $f\colon X \to Y$ の逆写像であるとは、次が成り立つことをいう。

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \quad \text{かつ} \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

写像の制限

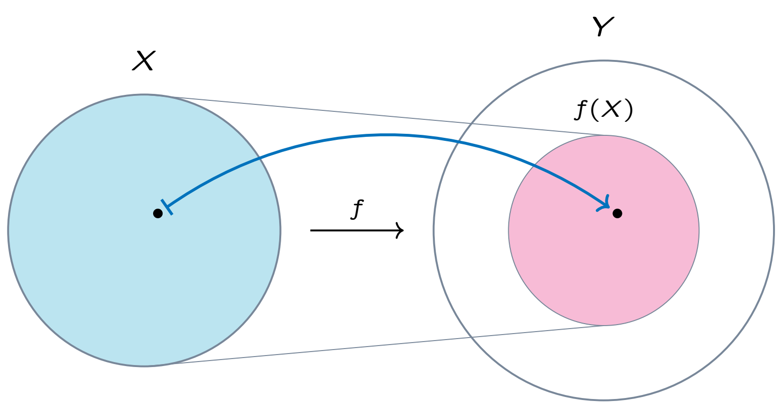
定義域を一部分に限定する、すなわち写像の定義域をその部分集合に取り替えることを、写像の制限（`restriction`）という。

🎓 def – 写像の制限

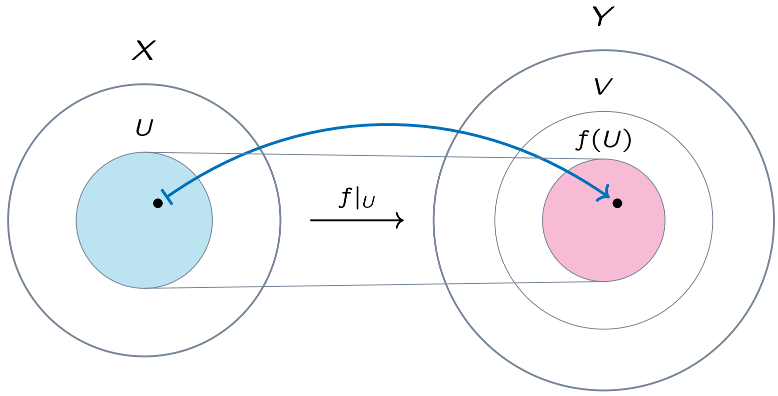
写像 $f\colon X \to Y$ に対して、部分集合 $U \subset X$ と $V \subset Y$ が $f(U) \subset V$ を満たすとき、$x \in U$ に対して $f(x) \in V$ を対応させる写像 $U \to V$ を写像 f の U への制限といい、$f|_U$ と表す。

$$\begin{array}{cccc} f|_U\colon & U & \longrightarrow & V \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

$f\colon X \to Y$（定義域が X）



$f|_U : U \to V$（定義域を U に制限）



直積集合

直積集合とは、2 つの集合からそれぞれ要素を取り出してつくったペアをすべて集めた集合である。

	b_1	b_2	$\cdots$	b_n
a_1	(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	$\cdots$	(a_1, b_n)
a_2	(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	$\cdots$	(a_2, b_n)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_m	(a_m, b_1)	(a_m, b_2)	$\cdots$	(a_m, b_n)

ただし、ペアには順序があり、たとえば、(a, b) と (b, a) は異なるものとみなす。このような順序を考慮したペアを順序対という。

直積集合は、順序対の集合である。

def A.2 - 直積集合

2 つの集合 A, B に対して、A と B の直積集合は次のように定義される。

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

直積集合の例：座標平面 $\mathbb{R}^2$

たとえば、2 次元平面内の各点は、2 つの実数の組 (x, y) で表すことができる。

このとき、x 座標と y 座標はそれぞれ実数の集合 $\mathbb{R}$ の要素であり、平面上の点 (x, y) を集めたものが、直積集合 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ となる。

この $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ を、$\mathbb{R}^2$ と表記することが多い。

2 次元平面を $\mathbb{R}^2$ と表記していたのは、このような直積集合の考え方が背景にある。

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	3
placeholder	1