第 2 章

線形写像と行列の演算

行列の導入

長方形に並んだ数の集まりを

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

などと書き、行列と呼ぶ

横の数字の並びを行、縦の数字の並びを列と呼ぶ

A は m 個の行と n 個の列をもつ行列である

第 i 行、第 j 列にある数字を a_{ij} と表し、これを (i, j) 成分と呼ぶ

行が m 個、列が n 個の行列は、m 行 n 列の行列、あるいは $m \times n$ 型の行列であるという

$n \times n$ 型の場合、行列は正方形なので n 次正方行列と呼ぶ

A の成分から第 j 列だけを取り出して $\mathbb{R}^m$ のベクトルとしたものが

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (1 \leq i \leq n)$$

であり、これを A の j 番目の列ベクトルという

A は、これらを横に並べたものという意味で

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

と書くことができる

def – 行列とベクトルの積

$m \times n$ 型の行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ と $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ との積を

$$A\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{a}_1 + v_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + v_n\boldsymbol{a}_n$$

により定める

ここで、v_i は $\boldsymbol{v}$ の第 i 成分である

$A\boldsymbol{v}$ を考えるとき、ほとんどの場合は、A が 1 つ与えられていて $\boldsymbol{v}$ がいろいろ動くという意識が強い

それは、行列 A のことを、ベクトルを与えて別なベクトルを作る

$$\text{入力ベクトル } \boldsymbol{v} \longrightarrow \text{出力ベクトル } A\boldsymbol{v}$$

という装置、すなわち写像だとみなすことである

def – 行列のスカラー倍

A を行列、c をスカラーとするとき、A のすべての成分を c 倍して得られる行列を cA とする

theorem - 行列とベクトルの積の性質

A, B を $m \times n$ 型行列、$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$、$c \in \mathbb{R}$ とするとき、次が成り立つ

i. $A(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{u} + A\boldsymbol{v}$

ii. $A(c\boldsymbol{v}) = cA\boldsymbol{v}$

証明

[Todo 1: book: 行列と行列式の基礎 p24（命題 1.4.3）]

線形写像の定義

def - 線形写像と線形性

写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が線形写像（`linear mapping`）であるとは、次の条件を満たすことをいう。

i. 任意の $c \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、$f(c\boldsymbol{v}) = cf(\boldsymbol{v})$

ii. 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、$f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$

これらの性質を写像 f の線形性という。

また、$m = n$ のとき、線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の線形変換（`linear transformation`）という。

線形変換は空間 $\mathbb{R}^n$ からそれ自身への写像なので、$\mathbb{R}^n$ 内において「ベクトルが変化している」（あるいは f が空間 $\mathbb{R}^n$ に作用している）ニュアンスとみることができる

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とするとき、(i) より、

$$f(0 \cdot \boldsymbol{v}) = 0 \cdot f(\boldsymbol{v})$$

なので、

$$f(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$$

が成り立つ

⚓ theorem – 零ベクトルの像

零ベクトルは線形写像によって零ベクトルに写される

$m = n = 1$ のときは、線形写像 $f \colon \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ は、通常の意味の関数である

このとき、i の性質から、

$$f(c) = f(c \cdot 1) = c \cdot f(1) \quad (c \in \mathbb{R} = \mathbb{R}^1)$$

が成り立つので、$a = f(1) \in \mathbb{R}$ とおくと、

$$f(x) = ax$$

と書ける

⚓ theorem 2.1 – 一次元線形写像と比例関数の同一性

線形写像 $f \colon \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ は、a を比例定数とする比例関数である

線形写像の表現行列

$f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を線形写像とするとき、各基本ベクトル $\boldsymbol{e}_j$ の f による像を

$$f(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

と書くとする

これらを横に並べることによって、m 行 n 列の行列を作る

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n)$$

この行列 A を f の表現行列という

特に、$\mathbb{R}^n$ の線形変換の表現行列は n 次正方行列である

$\mathbb{R}^n$ の一般のベクトル $\boldsymbol{v}$ を、基本ベクトルの線型結合として

$$\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j \boldsymbol{e}_j$$

と書く

このとき、f の線形性より、

$$f(\boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{n} v_j f(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} v_j \boldsymbol{a}_j$$

となる

このベクトルの第 i 成分は

$$a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \cdots + a_{in}v_n$$

と書ける

これは $A\boldsymbol{v}$ の第 i 成分である

したがって、この記法を踏まえて、次のような表記ができる

⚓ **theorem – 線形写像とその表現行列の関係**

$$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$$

比例関数が比例定数 a だけで決まるのと同じように、線形写像は表現行列 A が与えられれば決まる

def – 零写像と零行列

$f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を、すべての $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$ と定めたものは明らかに線形写像であり、これを零写像と呼ぶ

その表現行列はすべての成分が 0 である行列である

この行列を零行列と呼び、O で表す

$m \times n$ 型であることを明示するために $O_{m,n}$ と書くこともある

また、n 次正方行列の場合は、O_n と書く

def – 恒等写像と単位行列

$f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を、すべての $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ と定めたものは明らかに線形写像である

これを恒等写像と呼び、$f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ と書く

恒等写像の表現行列は、$f(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_j \quad (1 \leq j \leq n)$ より

$$E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

であり、これを単位行列と呼ぶ

単位行列は正方行列であり、n 次であることを明示したいときは E_n と書く

線形写像 f から行列 A を作ったのとは逆に、任意の行列から線形写像を作ることができる

theorem – 行列から線形写像を作る

$m \times n$ 型行列 A に対して、

$$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} \quad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$$

によって写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を定めれば、f は線形写像である

証明

行列とベクトルの積の性質より、f は線形写像である

また、f の定義から明らかに A は f の表現行列である ■

$\mathbb{R}^2$ の線形変換の例

[Todo 2: book: 行列と行列式の基礎 p51 - p56]

行列の積

theorem 2.2 – 線形写像の合成

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像 g と、$\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^l$ への線形写像 f が与えられているとき、これらを合成して得られる写像

$$f \circ g\colon \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^l$$

は、$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^l$ への線形写像である

証明

[Todo 3: book: 行列と行列式の基礎 p56 （問 2.2）]

f と g の表現行列をそれぞれ $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ とする

A は $l \times m$ 型、B は $m \times n$ 型の行列である

このとき、$f \circ g$ は $l \times n$ 型行列で表現される

それを C と書くことにして、その成分を計算しよう

そのためには、基本ベクトルの写り先を見ればよい

B を列ベクトルに分解して $B = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ と書くとき、

$$(f \circ g)(\boldsymbol{e}_j) = f(g(\boldsymbol{e}_j)) = f(\boldsymbol{b}_j) = A\boldsymbol{b}_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

なので、

$$C = (A\boldsymbol{b}_1, A\boldsymbol{b}_2, \ldots, A\boldsymbol{b}_n)$$

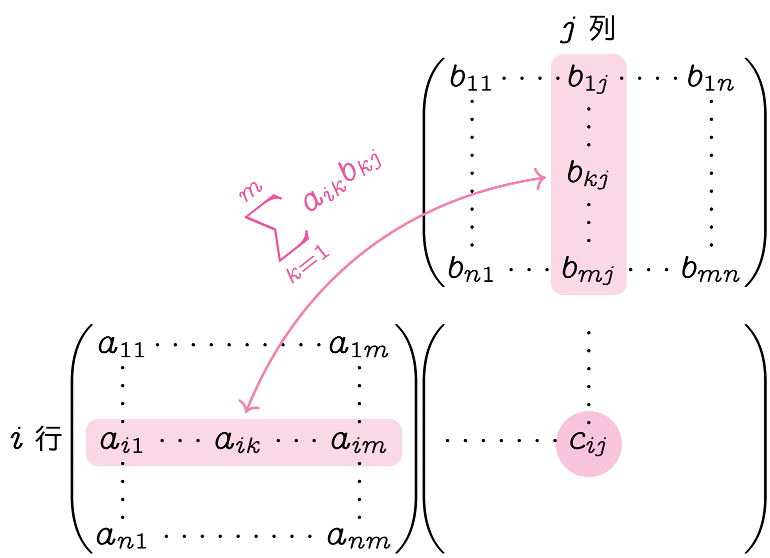
となる

C の (i, j) 成分は $A\boldsymbol{b}_j$ の第 i 成分なので、

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$$

により与えられる

つまり、C の (i, j) 成分を計算するときは、A の第 i 行、B の第 j 列だけを見ればよい



このようにして得られた $l \times n$ 型行列 C を AB と書き、A と B の**積**と呼ぶ

⚓ theorem – 単位行列との積

A を $m \times n$ 型とするとき、次が成り立つ

$$E_m A = A$$
$$A E_n = A$$

⚓ theorem – 零行列との積

A を $m \times n$ 型とするとき、次が成り立つ

$$O_m A = A O_n = O_{m,n}$$

2 つの行列の積が順番に依らない場合、2 つの行列は可換であるという

一般には、2 つの行列は可換であるとは限らない

つまり、AB と BA は一般には異なる

[Todo 4: book: 行列と行列式の基礎 p58 （例 2.2.3, 2.2.4）]

行列の和とスカラー倍

A, B がともに $m \times n$ 型行列であるとき、それぞれの (i, j) 成分を足すことで行列の和 $A + B$ を定める

⚓ theorem – 分配法則

積が定義できるとき、

$$A(B + C) = AB + AC$$
$$(B + C)A = BA + CA$$

⚓ theorem – 行列の積とスカラー倍の性質

行列 $A,\ B$ の積 AB が定義できるとき、つまり A の列の個数と B の行の個数が同じであるとき、$c \in \mathbb{R}$ に対して

$$(cA)B = A(cB) = c(AB)$$

が成り立つ

⚓ theorem – 線形写像の和

$f, g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を線形写像とし、

$$h(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{v}) \quad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$$

により写像 $h\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を定めるとき、h も線形写像である

また、f, g の表現行列を A, B とするとき、h の表現行列は $A + B$ である

なお、$h = f + g$ と書き、f, g の**和**と呼ぶ

証明

[Todo 5: book: 行列と行列式の基礎 p59 （問 2.5）]

行列の積の結合法則

⚓ theorem – 積の結合法則

積 AB, BC がともに定義できるとき、

$$(AB)C = A(BC)$$

写像による証明

A, B, C がそれぞれ $q \times m$, $m \times n$, $n \times p$ 型行列だとする

線形写像の合成

$$\mathbb{R}^p \xrightarrow{h} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^q$$

を考え、f, g, h の表現行列をそれぞれ A, B, C とする

一般的な写像の合成の性質として、

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

が成り立つから、

$$(AB)C = A(BC)$$

がしたがう ■

積の計算規則による証明

AB の (i, l) 成分は、

$$(AB)_{il} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kl}$$

これを用いて、

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{ij} &= \sum_{l=1}^{n} (AB)_{il} c_{lj} \\ &= \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} \end{aligned}$$

i, j はいま固定されているので、和には関係がない

動いているのは $k,\ l$ だけ

ここで、次の書き換えができる

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj} &= \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kl}c_{lj}\right)\\ &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kl}c_{lj}\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{l=1}^{n}$ の右にある式は l に関する和をとる前のものなので、l は止まっていると考えてよく、単純な分配法則を使っている

また、括弧がなくても、k に関する和を先にとって、その後で l に関する和をとっていると読むことができる

このとき、和の順番は交換してもよいので、

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kl}c_{lj} &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}\\ &= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{n} b_{kl}c_{lj}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(BC)_{kj}\end{aligned}$$

先ほどと同様に、$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}$ の右では k は止まっていると考えている

そして、この結果は、$A(BC)$ の (i, j) である ■

結合法則が成り立つことが示されたので、$(AB)C$ または $A(BC)$ を表すとき、括弧を書かずに単に ABC と書いても問題ない

行列の個数が増えても同様である

また、A が正方行列の場合は、

$$\begin{aligned}A^2 &= AA\\ A^3 &= AAA\end{aligned}$$

などのように書く

行列の区分け

行列を

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

のようなブロック型に区分けして計算することがよくある

A が $m \times n$ 型のとき、$m = m_1 + m_2$, $n = n_1 + n_2$ として、A_{ij} は $m_i \times n_j$ 型である

また、B が $n \times l$ 型で、$n = n_1 + n_2$, $l = l_1 + l_2$ と区分けして

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

とするとき、

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

のように A_{ij} などが行列の成分であるかのようにして（ただし積の順序は変えずに）積が計算できる

ここで、A の列の区分けと B の行の区分けの仕方が同じであることが必要である

3 つ以上のブロックに分ける場合も同様である

行列の転置

行列 $A = (a_{ij})$ に対し、その成分の行と列の位置を交換してできる行列を転置行列という

def – 転置行列

$A = (a_{ij})$ を $m \times n$ 型行列とするとき、(i, j) 成分が a_{ji} である $n \times m$ 型行列を A の転置行列と呼び、${}^tA$ と表す

文字 t を左肩に書くのは、右肩に書くと t 乗に見えてしまうからである
t 乗と区別しつつ、右肩に書く流儀として、A^T と書く場合もある

ベクトルの転置

特別な場合として、n 次の数ベクトル $\boldsymbol{v}$ を $n \times 1$ 型行列とみて転置したもの ${}^t\boldsymbol{v}$ は $1 \times n$ 型行列となる
すなわち、数ベクトルの転置は横ベクトルになる

このことを利用して、たとえば

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

を ${}^t(v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n)$ と表記することもある

転置の性質

転置は「行と列の入れ替え」であるので、明らかに次が成り立つ

theorem 2.3 - 転置操作の反復不変性

${}^tA$ に対して、転置をもう一度して得られる行列は A と一致する

$${}^t({}^tA) = {}^{tt}A = A$$

theorem 2.4 - 転置と行列積の順序反転性

行列 A, B の積 AB が定義できるとき、

$$^t(AB) = {}^tB{}^tA$$

証明

[Todo 6: book: 行列と行列式の基礎 p78 命題 2.5.3]

theorem 2.5 - 行列の和に対する転置の分配性

A と B が同じ型の行列であるとき、

$$^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$$

証明

[Todo 7:]

対称行列と交代行列

正方行列 A が「転置しても元と変わらない」としたら、A の成分は左上から右下にかけての対角線に関して対称（$a_{ij} = a_{ji}$）になっている

def 2.1 - 対称行列

正方行列 A が次を満たすとき、A を**対称行列**という

$$ {}^tA = A $$

🎓 def – 交代行列

正方行列 A が次を満たすとき、A を**交代行列**という

$$ {}^tA = -A $$

正方行列のトレース

🎓 def – 対角成分

正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、a_{ii} を**対角成分**と呼ぶ

🎓 def 2.2 – トレース

正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、対角成分の和

$$ \sum_{i=1}^{n} a_{ii} $$

を A の**トレース**と呼び、$\mathrm{tr}(A)$ と表す

⚓ theorem – トレースの性質

i. $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$
ii. $\mathrm{tr}(cA) = c\,\mathrm{tr}(A)$
iii. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

証明

[Todo 8: book: 行列と行列式の基礎 p64 問 2.9]

行列と複素数

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおき、

$$aE + bI = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

という形の行列を**複素数**と呼ぶことにより、複素数の定義ができる

この定義では、通常は $a + bi$ と書かれるものを行列として実現している

[Todo 9: book: 意味がわかる線形代数 p43〜49]

Zebra Notes

Type	Number
todo	9