第 18 章

直和分解と不変部分空間

部分空間の共通部分

[Placeholder 1: 再編予定（book: 線形代数の世界 p20〜21）]

与えられた部分空間から、新しく部分空間を作ることができる

theorem – 線形部分空間の共通部分は部分空間

U, W を体 K 上の V の部分空間とするとき、共通部分 $U \cap W$ は V の部分空間である

証明

和について

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in U \cap W$ とすると、共通部分の定義より、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ はどちらも U と W の両方に属していることになる

つまり、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in U$ かつ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ である

U も W も部分空間なので、部分空間の定義より、

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in U$$
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in W$$

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ が U と W の両方に属していることから、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ は $U \cap W$ に属する

よって、$U \cap W$ は和について閉じている ■

スカラー倍について

$\boldsymbol{a} \in U \cap W$ と $c \in K$ をとる

共通部分の定義より、$\boldsymbol{a}$ は U と W の両方に属しているので、部分空間の定義より

$$c\boldsymbol{a} \in U$$
$$c\boldsymbol{a} \in W$$

よって、$c\boldsymbol{a}$ は $U \cap W$ に属するため、$U \cap W$ はスカラー倍について閉じている ■

部分空間の和

[Placeholder 2: 再編予定（book: 線形代数の世界 p20〜21）]

⚓ **theorem** – 線形部分空間の和は部分空間

U, W を体 K 上の V の部分空間とするとき、和空間

$$U+W := \{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{w} \in W\}$$

は V の部分空間である

証明

和について

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in U,\ \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \in W$ とする

U と W は部分空間なので、部分空間の定義より

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 \in U, \quad \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 \in W$$

一方、和空間の定義より、$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2$ はそれぞれ $U + W$ の元である

これらの元の和をとったときに、その和も $U + W$ に属していれば、和空間は和について閉じているといえる

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1) + (\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2) &= (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) + (\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) \\ &\in U + W\end{aligned}$$

上式で、和空間は和について閉じていることが示された ■

スカラー倍について

$\boldsymbol{a} \in U,\ \boldsymbol{b} \in W$ と $c \in K$ をとる

U と W は部分空間なので、部分空間の定義より

$$\begin{aligned}c\boldsymbol{a} &\in U \\ c\boldsymbol{b} &\in W\end{aligned}$$

一方、和空間の定義より、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ は $U + W$ の元である

この元をスカラー倍したときに、そのスカラー倍も $U + W$ に属していれば、和空間はスカラー倍について閉じているといえる

$$\begin{aligned}c(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) &= c\boldsymbol{a} + c\boldsymbol{b} \\ &\in U + W\end{aligned}$$

上式で、和空間はスカラー倍について閉じていることが示された ■

3 つ以上の部分空間の和も同様に考えて、一般に和空間は次のように定義される

def – 和空間

線形空間 V と、その部分空間 $V_1, \ldots, V_k$ が与えられたときに、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_k \quad (\boldsymbol{v}_i \in V_i, i = 1, \ldots, k)$$

と表されるベクトル $\boldsymbol{v}$ 全体がなす集合を $V_1, \ldots, V_k$ の和空間といい、

$$\sum_{i=1}^{k} V_i$$

と書く

和空間を張るベクトル

部分空間を生成するベクトルを用いて、部分空間の和を表せる

theorem 18.1 – 部分空間の和と生成ベクトル

K^n の 2 つの部分空間 $U = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m \rangle$ と $W = \langle \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k \rangle$ に対して、和空間 $U + W$ は

$$U + W = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k \rangle$$

となる

証明

和空間 $U + W$ は

$$U + W = \{\boldsymbol{x} \in K^n \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w},\ \boldsymbol{u} \in U,\ \boldsymbol{w} \in W\}$$

と定義される

また、$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ の張る部分空間は

$$H = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k \rangle$$

である

これらが等しいことを示せばよい

$U+W \subseteq H$

任意の $\boldsymbol{x} \in U+W$ に対し、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$（$\boldsymbol{u} \in U,\ \boldsymbol{w} \in W$）と書ける

すなわち、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_m\boldsymbol{u}_m && (a_i \in K) \\ \boldsymbol{w} &= b_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + b_k\boldsymbol{w}_k && (b_j \in K) \end{aligned}$$

よって、

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} a_i\boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{k} b_j\boldsymbol{w}_j \in H$$

$H \subseteq U+W$

任意の $\boldsymbol{x} \in H$ は

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} a_i\boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{k} b_j\boldsymbol{w}_j$$

と書ける

ここで

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{m} a_i\boldsymbol{u}_i \in U$$

$$\boldsymbol{w} = \sum_{j=1}^{k} b_j\boldsymbol{w}_j \in W$$

とすれば、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \in U+W$$

以上より、$U+W \subseteq H$ と $H \subseteq U+W$ が成り立つので、$U+W = H$ が示された ■

和空間の包含関係

theorem – 和空間における部分空間の和集合の包含

和空間は、和集合を部分集合として包含する

すなわち、U, W を V の部分空間とするとき、

$$U + W \supset U \cup W$$

が成り立つ

証明

theorem 10.1「部分空間における零ベクトルの包含」より、部分空間はいずれも零ベクトルを含むので、たとえば、$U = \{\mathbf{0}\}$ の場合、

$$U + W \supset W$$

同様に、

$$U + W \supset U$$

よって、$U + W$ は U または W を包含することがわかる

すなわち、

$$U + W \supset U \cup W$$

が成り立つ ■

theorem – 和空間の最小包含性

U, W を V の部分空間とする

和空間 $U + W$ は、U と W を含む部分空間のうち、最小のものである

証明

V の任意の部分空間のうち、U と W の両方を包含するもの V' を考える
このとき、部分空間は和に閉じているため、V' は $U+W$ も包含する

$$V' \supset U+W$$

よって、V' の任意性から、$U+W$ は U と W を含む部分空間のうち、最小のものとなる ■

このように、和空間 $U+W$ は、U や W を部分空間として含むが、U や W より真に大きい（U, W を真部分集合として含む）とは限らない

別の角度からいうと、

$$V = W_1 + W_2$$

という関係があるだけで、「V が W_1 と W_2 の和に分解された」というのは適当ではない

和空間が持つこの欠陥を補うために、和空間の概念をより精密化したものが、次に述べる直和である

直和分解

def 18.1 - 直和分解

線形空間 V の部分集合 W_1, W_2 に対して、任意の $\boldsymbol{v} \in V$ が $\boldsymbol{w}_1 \in W_1$, $\boldsymbol{w}_2 \in W_2$ によって

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$$

と一意的に表されるとき、V は W_1 と W_2 の直和である（直和に分解される）といい、

$$V = W_1 \oplus W_2$$

と書く

この定義は、次のように言い換えることができる

theorem 18.2 - 直和分解の同値条件

線形空間 V の部分集合 W_1, W_2 に対して $V = W_1 \oplus W_2$ が成り立つことと、

i. $V = W_1 + W_2$
ii. $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$

の両方が成り立つことは同値である

証明

(i), (ii) $\Longrightarrow V = W_1 \oplus W_2$

$\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_1' \in W_1$, $\boldsymbol{w}_2$, $\boldsymbol{w}_2' \in W_2$ とする
仮定 (i) と和空間の定義より、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_1' + \boldsymbol{w}_2'$$

この等式は、移項によって次のように変形できる

$$\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_1' = \boldsymbol{w}_2' - \boldsymbol{w}_2$$

部分空間は和に閉じているため、左辺は W_1 に、右辺は W_2 に属する
よって、このベクトルは $W_1 \cap W_2$ に属する
仮定 (ii) より、$W_1 \cap W_2$ の元は零ベクトルであるので、

$$\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_1' = \mathbf{0}$$
$$\boldsymbol{w}_2' - \boldsymbol{w}_2 = \mathbf{0}$$

したがって、

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_1', \quad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_2'$$

となり、$\boldsymbol{v}$ の表現の一意性が示された ■

$V = W_1 \oplus W_2 \implies$ (i), (ii)

和空間の定義をふまえると、(i) は直和分解の定義に含まれる

(ii) を示すため、$\boldsymbol{v} \in W_1 \cap W_2$ とする

$\boldsymbol{v}$ は零ベクトルを用いて、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{v}$$

と表せるが、直和分解の定義より、$\boldsymbol{v}$ の表現は一意的であるので、

$$\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

を得る

よって、$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ ■

直和分解の一意性を表す条件

3 つ以上の部分空間による直和を考えるにあたって、直和分解の定義に含まれていた「一意性」を表す条件を定式化する

theorem – 部分空間の和における表現の一意性

和空間 $\sum_{i=1}^{k} V_i$ の元 $\boldsymbol{v}$ を、部分空間 $V_1, \ldots, V_k$ の元 $\boldsymbol{v}_i \in V_i$ の和として

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{v}_i \quad (\boldsymbol{v}_i \in V_i)$$

と書くとする

このとき、次の条件が成り立てば、和に使われる $\boldsymbol{v}_i$ は $\boldsymbol{v}$ により一意的に定まる

$$\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_k = \mathbf{0} \implies \boldsymbol{v}_1 = \cdots = \boldsymbol{v}_k = \mathbf{0}$$

証明

仮に、$\boldsymbol{v}$ が 2 通りの和で表せるとする

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{v}'_i \quad (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}'_i \in V_i)$$

このとき、

$$\sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}'_i) = \boldsymbol{0}$$

となるが、ここで $\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}'_i$ は V_i に属する

そこで、$\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}'_i \in V_i$ とおき、

$$\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{0} \implies \boldsymbol{w}_1 = \cdots = \boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{0}$$

という条件を満たすとすると、$\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{0}$ より、

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}'_i \quad (i = 1, \ldots, k)$$

が導かれる

したがって、$\boldsymbol{v}$ の和に使われる $\boldsymbol{v}_i$ は一意的に定まる ■

この一意性の条件を用いて、複数の部分空間による直和を次のように定義する

def - 直和

線形空間 V と、その部分空間 $V_1, \ldots, V_k$ が与えられたとき、$\boldsymbol{v}_i \in V_i$, $\boldsymbol{v} \in \sum_{i=1}^{k} V_i$ に対して、

$$\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0} \implies \boldsymbol{v}_1 = \cdots = \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$$

が成り立つとき、$\displaystyle\sum_{i=1}^{k} V_i$ は V の直和であるといい、

$$\bigoplus_{i=1}^{k} V_i$$

と書く

和空間と直和の次元

⚓ **theorem - 和空間の次元**

K^n の部分空間 V, W に対して、

$$\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

が成り立つ

証明

$\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$ とする

$V \cap W$ の基底 $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_d\}$ をとる

これを theorem 10.6「基底の延長」に基づいて、V の基底

$$\mathcal{V} \cup \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-d}\}$$

に延長する

同様に、$\mathcal{V}$ を W の基底

$$\mathcal{V} \cup \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{m-d}\}$$

に延長する

このとき、$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_d, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-d}, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{m-d}$ が $V+W$ の基底になることを示す

$V+W$ を生成すること

$\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{w} \in W$ とすると、それぞれ基底の線形結合で表すことができる

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{d} a_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{n-d} b_j \boldsymbol{v}_j$$

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{d} c_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{k=1}^{m-d} d_k \boldsymbol{w}_k$$

$V+W$ の任意の元は、$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ と書けるので、

$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\sum_{i=1}^{d}(a_i+c_i)\boldsymbol{u}_i+\sum_{j=1}^{n-d}b_j\boldsymbol{v}_j+\sum_{k=1}^{m-d}d_k\boldsymbol{w}_k$$

となり、$\{\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_d,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{n-d},\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_{m-d}\}$ の線形結合で表せる ■

線型独立であること

$\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_d,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{n-d},\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_{m-d}$ が線型独立であることを示すために、次のような線形関係式を考える

$$\sum_{i=1}^{d}c_i\boldsymbol{u}_i+\sum_{j=1}^{n-d}c_{d+j}\boldsymbol{v}_j+\sum_{k=1}^{m-d}c_{d+n-d+k}\boldsymbol{w}_k=\boldsymbol{0}$$

ここで、$c_i\in K$ はスカラーである

この式を V と W の基底の線型結合として考えると、V の基底 $\boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{v}_j$ に関する部分と W の基底 $\boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{w}_k$ に関する部分がそれぞれ線形独立であるため、結局どの項においても $c_i=0$ である必要がある

よって、$\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_d,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{n-d},\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_{m-d}$ は線型独立である ■

以上より、$\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_d,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{n-d},\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_{m-d}$ は $V+W$ の基底であることが示された

この基底をなすベクトルの個数（次元）について考えると、

$$\begin{aligned}\dim(V+W)&=d+(n-d)+(m-d)\\&=n+m-d\end{aligned}$$

となる

ここで、$d=\dim(V\cap W)$ なので、

$$\dim(V+W)=\dim V+\dim W-\dim(V\cap W)$$

と書き換えられ、目的の式が得られた ■

直和分解に対して和空間の次元定理を適用すると、次のようにまとめられる

theorem 18.3 - 直和の次元

W_1, W_2 が V の部分空間であるとき、

$$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

が成り立つ

証明

直和分解の定義より $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ であるので、

$$\dim(W_1 \cap W_2) = 0$$

よって、和空間の次元の式から、$\dim(W_1 \cap W_2)$ が消えた形になる ■

また、和空間の次元定理の証明過程を、直和分解の場合で考えることで、次の定理が得られる

theorem 18.4 - 直和の基底

線形空間 V が部分空間 W_1, W_2 の直和に分解されることと、V の基底が W_1, W_2 の基底を合わせたものになることは同値である

証明

直和分解の場合、$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ であるため、和空間の次元定理の証明過程において、$W_1 \cap W_2$ の基底を考える必要がなくなる

よって、和空間の次元定理の証明と同様にして、W_1 の基底と W_2 の基底を合わせたものが V の基底になることが示される ■

不変部分空間

V 上の線形変換 f について、「変換 f で写しても変わらない」という性質を考える

def - f 不変

f を線形空間 V の線形変換とする

V の部分空間 W に対して、

$$f(W) \subset W$$

すなわち、

$$\forall \boldsymbol{w} \in W \Longrightarrow f(\boldsymbol{w}) \in W$$

が成り立つとき、W は f 不変な部分空間であるという

また、$V = \mathbb{R}^n$ で、f が正方行列 A によって定まっているときは、f 不変な部分空間 W を A 不変な部分空間ともいう

写像の制限と不変部分空間

theorem 18.5 - 不変部分空間による線形変換のブロック型行列表現

V を n 次元線形空間とし、線形変換 $f\colon V \to V$ を考える

このとき、V のある部分空間 W が f 不変ならば、V の適当な基底について、f は

$$\begin{pmatrix} * & * \\ O & * \end{pmatrix} \text{または} \begin{pmatrix} * & O \\ * & * \end{pmatrix}$$

という形の行列で表すことができる

証明

$\dim(W) = r$ とし、W の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ を延長して V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ をとる

このとき、表現行列の構成［第 13 章］より、

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{r} a_{ij}\boldsymbol{v}_i + \sum_{i=r+1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{v}_i \quad (1 \leq j \leq n)$$

とおける

ここで、W は f 不変であることは、$1 \leq j \leq r$ の範囲では $f(\boldsymbol{v}_j) \in W$ であることを意味する

W の元 $f(\boldsymbol{v}_j)$ は、W の基底だけを用いて表現できるので、

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{r} a_{ij}\boldsymbol{v}_i \quad (1 \leq j \leq r)$$

すなわち、もともとの $f(\boldsymbol{v}_j)$ の式において、

$$\sum_{i=r+1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0} \quad (1 \leq j \leq r)$$

となっている

$\boldsymbol{v}_i$ は基底なので線型独立であり、したがって、

$$a_{ij} = 0 \quad (1 \leq j \leq r,\ r+1 \leq i \leq n)$$

が成り立つ

この条件より、f の表現行列 (a_{ij}) は、

$$\begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{*}}^{r} & \overbrace{\hphantom{*}}^{n-r} \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline O & * \end{array}\right) \begin{array}{l} \updownarrow r \\ \updownarrow n-r \end{array}$$

というような形になる

また、V の基底として、順序を変えた $\boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ を取ることもできる

この場合は、

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{r} a_{ij}\boldsymbol{v}_i + \sum_{i=r+1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{v}_i \quad (r+1 \leq j \leq n)$$

とおくと、$r+1 \leq j \leq n$ の範囲（V の基底の後半部分）で

$$\sum_{i=1}^{r} a_{ij}\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$$

となるので、すなわち、

$$a_{ij} = 0 \quad (r+1 \leq j \leq n,\ 1 \leq i \leq r)$$

よって、f の表現行列 (a_{ij}) は、

$$\begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{*}}^{n-r} & \overbrace{\hphantom{O}}^{r} \\ \left(\begin{array}{c|c} * & O \\ \hline * & * \end{array}\right) & \begin{array}{c} \updownarrow n-r \\ \updownarrow r \end{array} \end{array}$$

という形になる

以上より、2 通りの f の表現行列の形が得られた ■

V の基底を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ ととった場合、$f(\boldsymbol{v}_j) \in W$ は

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{r} a_{ij}\boldsymbol{v}_i \quad (1 \leq j \leq r)$$

だけで表現できた

この $1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq r$ の部分は、f の表現行列

$$A = (a_{ij}) = \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{A_{11}}}^{r} & \overbrace{\hphantom{A_{12}}}^{n-r} \\ \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline O & A_{22} \end{array}\right) & \begin{array}{c} \updownarrow r \\ \updownarrow n-r \end{array} \end{array}$$

の、A_{11} の部分に対応する

つまり、この行列 A_{11} は、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ で張られる V の部分空間 W から W への線形写像 f' を、基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ について表現する行列になっている

f' は、f の定義域を W に制限したものになっているが、W の元に限定して考える限り、実質的には f と区別がないものである

この意味で、写像 f' を、写像 f の W への制限と呼び、$f|_W$ と表記する

def – 写像の制限

写像 $f\colon X \to Y$ において、X のある部分集合 S が与えられたとき、定義域を S に限定したものを f の S に対する制限といい、

$$f|_S\colon S \to Y$$

と表す

同様に、V の基底を $\boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ ととった場合、$f(\boldsymbol{v}_j) \in W$ は

$$\sum_{i=r+1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{v}_i \quad (r+1 \leq j \leq n)$$

だけで表現できた

この $r+1 \leq i \leq n,\ r+1 \leq j \leq n$ の部分は、f の表現行列

$$A = (a_{ij}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{\quad n-r \quad} & \overleftrightarrow{\quad r \quad} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & O \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \updownarrow n-r \\ \updownarrow r \end{array}$$

の、A_{22} の部分に対応する

つまり、この場合は、A_{22} が変換 f の W への制限 $f|_W$ を表現する行列になっている

不変部分空間への直和分解

theorem 18.5「不変部分空間による線形変換のブロック型行列表現」の証明では、W の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ を延長したものを V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ とした

このとき、

$$W' = \langle \boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$$

とおくと、V の基底が W, W' の基底を合わせたものになっているため、**theorem 18.4** 「直和の基底」より、

$$V = W \oplus W'$$

となる

ここで、もし W' も f 不変であれば、右上の A_{12} も零行列になって、表現行列は

$$A = (a_{ij}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{\quad r \quad} & \overleftrightarrow{\quad n-r \quad} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & O \\ \hline O & A_{22} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ r \\ \\ n-r \end{array}$$

という**ブロック対角型**になる

theorem – 不変部分空間への直和分解

線形空間 V と、V 上の線形変換 f に対し、V が f 不変な部分空間 W_1 と W_2 の直和に分解することができれば、すなわち、

i. $V = W_1 \oplus W_2$
ii. W_1, W_2 は f 不変な V の部分空間

となる W_1, W_2 が存在すれば、適当な V の基底について、f は次のような形の行列で表せる

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{\quad \dim(W_1) \quad} & \overleftrightarrow{\quad \dim(W_2) \quad} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} * & O \\ \hline O & * \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \dim(W_1) \\ \\ \dim(W_2) \end{array}$$

または

$$
\begin{array}{cc}
\dim(W_2) & \dim(W_1) \\
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
\boxed{\ast} & O \\
O & \boxed{\ast}
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\dim(W_2) \\
\dim(W_1)
\end{array}
$$

証明

W_1 の基底、W_2 の基底をこの順に並べるか、その反対の順に並べて、V の基底を構成することで、**theorem 18.5**「不変部分空間による線形変換のブロック型行列表現」の証明と同様に示される ■

さらに、V をより細かい部分空間の直和に分解できる場合には、次のようになる

theorem – 複数の不変部分空間への直和分解

線形空間 V と、V 上の線形変換 f について、

i. $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$

ii. 各部分空間 W_i は f 不変な V の部分空間

であるならば、適当な V の基底に対し、f は次のような形の行列で表せる

$$
\begin{pmatrix}
\boxed{\ast} & & & O \\
& \boxed{\ast} & & \\
& & \ddots & \\
O & & & \boxed{\ast}
\end{pmatrix}
$$

対角線上の各正方形の大きさは、各部分空間 W_i の次元に対応する

そこで、以上の議論を究極にまで押し進めると、次の定理になる

⚓ **theorem 18.6 - 一次元部分空間への直和分解**

n 次元部分空間 V が、n 個の f 不変の 1 次元部分空間の直和に分解できるとき、すなわち、

i. $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$
ii. $W_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ は f 不変な 1 次元部分空間

となるときは、f は次のような対角行列で表せる

$$\begin{pmatrix} * & & & O \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ O & & & * \end{pmatrix}$$

一次元不変部分空間

W を一次元部分空間とすると、これは基底 $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$ で張られる空間であるので、

$$W = \langle \boldsymbol{w} \rangle = \{\alpha \boldsymbol{w} \mid \alpha \in K\}$$

この一次元部分空間 W が f 不変であるとは、定義より、

$$\forall \boldsymbol{w} \in W \Longrightarrow f(\boldsymbol{w}) \in W$$

であり、これで W の元は $\alpha \boldsymbol{w}$ とも $f(\boldsymbol{w})$ とも表せることになるので、

$$f(\boldsymbol{w}) = \alpha \boldsymbol{w} \quad (\alpha \in K)$$

がいえる

以上をふまえて、**theorem 18.6**「一次元部分空間への直和分解」という定理をより具体的に整理してみる

$\dim(V) = n$ とすると、表現行列の構成［第 13 章］より、V 上の線形変換 f の表現行列 A を構成する式は、

$$(f(\boldsymbol{w}_1), \ldots, f(\boldsymbol{w}_n)) = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n)A$$

となるが、ここで、

$$(f(\boldsymbol{w}_1), \ldots, f(\boldsymbol{w}_n)) = (\alpha_1\boldsymbol{w}_1, \ldots, \alpha_n\boldsymbol{w}_n)$$

であるので、

$$(f(\boldsymbol{w}_1), \ldots, f(\boldsymbol{w}_n)) = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n)\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

と書き換えられる

したがって、f は基底 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ について、次の対角行列で表される

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

ここで現れたスカラー α_i やベクトル $\boldsymbol{w}_i$ と、線形写像 f との関係が、固有値・固有ベクトルと行列の対角化という話題に発展する

. . . . . .

Zebra Notes

Type	Number
placeholder	2