第 19 章

行列の対角化

固有値と固有ベクトル

与えられた線形写像を表現する行列を単純化（対角化）する上で、一次元不変部分空間への直和分解が本質的な役割を果たす

一次元の f 不変部分空間 W の基底 $\boldsymbol{a}$ とは、

ある $\lambda \in K$ について $f(\boldsymbol{a}) = \lambda \boldsymbol{a}$

となるような $\mathbf{0}$ 以外のベクトルだった

def – 固有値と固有ベクトル

体 K 上の線形空間 V 上の線形変換 $f\colon V \to V$ に対して、

$$f(\boldsymbol{a}) = \lambda \boldsymbol{a} \quad (\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0})$$

となるベクトル $\boldsymbol{a} \in V$ が存在するとき、このようなスカラー $\lambda \in K$ を、線形変換 f の固有値という

また、このようなベクトル $\boldsymbol{a}$ を、f の固有値 λ に属する固有ベクトルという

線形変換 f の表現行列を A とすると、これは正方行列であり、$f(\boldsymbol{a}) = A\boldsymbol{a}$ と表せる

よって、固有値と固有ベクトルの定義は、次のようにも書ける

def – 行列の固有値と固有ベクトル

正方行列 A に対して、

$$A\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} \quad (\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0})$$

となるベクトル $\boldsymbol{a}$ とスカラー λ が存在するとき、このようなスカラー λ を行列 A の固有値という

また、このようなベクトル $\boldsymbol{a}$ を、行列 A の固有値 λ に属する固有ベクトルという

異なる固有値に属する固有ベクトル

theorem – 異なる固有値に属する固有ベクトルの非一致性

異なる固有値 $\alpha_i, \alpha_j\ (\alpha_i \neq \alpha_j)$ に属する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_j$ は異なるベクトルである

証明

固有値と固有ベクトルの定義より、

$$\begin{cases} A\boldsymbol{p}_i &= \alpha_i\boldsymbol{p}_i \\ A\boldsymbol{p}_j &= \alpha_j\boldsymbol{p}_j \end{cases}$$

である

もし $\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{p}_j$ ならば、

$$\alpha_i\boldsymbol{p}_i = \alpha_j\boldsymbol{p}_i$$
$$\therefore \quad (\alpha_i - \alpha_j)\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{0}$$

となるが、$\boldsymbol{p}_i$ は固有ベクトルであり $\boldsymbol{0}$ ではないので、$\alpha_i - \alpha_j = 0$ となる

すなわち、

$$\alpha_i = \alpha_j$$

が成立し、これは $\alpha_i \neq \alpha_j$ に反する

よって、$\boldsymbol{p}_i \neq \boldsymbol{p}_j$ でなければならない ■

この定理を発展させて、次のことがいえる

theorem 19.1 - 異なる固有値に属する固有ベクトルの線型独立性

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ が行列 A の相異なる固有値であるとすると、それぞれに属する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_k$ は線型独立である

証明

固有値の個数 k についての数学的帰納法によって証明する

$k = 1$ のとき、$\boldsymbol{p}_1$ は固有ベクトルゆえ $\boldsymbol{0}$ ではないので、$\{\boldsymbol{p}_1\}$ は線型独立である

$k \geq 2$ として、$(k-1)$ 個以下の固有ベクトルについて定理の主張が成り立つと仮定する

このとき、線形関係式

$$c_1\boldsymbol{p}_1 + c_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{0}$$

を考える

両辺に A をかけると、$A\boldsymbol{p}_i = \alpha_i\boldsymbol{p}_i$ より、

$$c_1\alpha_1\boldsymbol{p}_1 + c_2\alpha_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + c_k\alpha_k\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{0}$$

この等式から、初めの線形関係式の α_k 倍を引いて

$$c_1(\alpha_1 - \alpha_k)\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_{k-1}(\alpha_{k-1} - \alpha_k)\boldsymbol{p}_{k-1} = \boldsymbol{0}$$

ここで、帰納法の仮定より、$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_{k-1}$ は線型独立であるため、係数はすべて 0 でなければならない

$$c_1(\alpha_1 - \alpha_k) = 0, \quad \ldots, \quad c_{k-1}(\alpha_{k-1} - \alpha_k) = 0$$

さらに、$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ は相異なる固有値であるため、$\alpha_i - \alpha_k \neq 0 \ (i = 1, \ldots, k-1)$ である

よって、

$$c_1 = 0, \quad \ldots, \quad c_{k-1} = 0$$

が成り立つ

この結果を初めの線形関係式に代入すると、

$$c_k \boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{0}$$

が残るが、$\boldsymbol{p}_k$ は固有ベクトルであり $\boldsymbol{0}$ ではないため、$c_k = 0$ も成り立つ

以上より、$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_k$ は線型独立である ■

固有ベクトルによる行列の対角化

一次元不変部分空間［第 18 章］で見たように、

$$f(\boldsymbol{a}_i) = \lambda_i \boldsymbol{a}_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

となるような $\boldsymbol{a}_i$ を基底として用いると、線形変換 f は次のような対角行列で表現できた

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

そして、このような $\boldsymbol{a}_i$ を固有ベクトル、λ_i を固有値として定義したため、

> 行列 A の固有ベクトルからなる基底が存在すれば、
>
> A は対角化できる

と言い換えられる

線形変換 f の表現行列を A とすると、A は正方行列である

たとえば基底を A の固有ベクトルに変換した際に、theorem 13.3「基底変換に伴う表現行列の変換（線形変換の場合）」より、この線形変換 f の表現行列が $P^{-1}AP$ に変化するとして、この行列 $P^{-1}AP$ が対角行列となる場合が、A が対角化できるということである

def 19.1 – 対角化可能

与えられた正方行列 A が適当な正則行列 P により

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と変形できるとき、A は対角化可能であるという

行列 A の固有ベクトルからなる基底が存在すれば、A は対角化可能である、ということを定式化しよう

theorem 19.2 – 対角化可能性と固有ベクトルの線型独立性

n 次元正方行列 A が対角化可能であるための必要十分条件は、線型独立な n 個の A の固有ベクトルが存在することである

証明

線型独立な A の固有ベクトルが存在 $\Longrightarrow$ A は対角化可能

A の固有ベクトルを $\boldsymbol{a}_i\ (i = 1, \ldots, n)$、それに対応する固有値を α_i とすると、固有値と固有ベクトルの定義より、次式が成り立つ

$$f(\boldsymbol{a}_i) = \alpha_i \boldsymbol{a}_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

仮定より $\boldsymbol{a}_i$ は線型独立であり、一次元部分空間 $\{c\boldsymbol{a}_i \mid c \in K\}$ は $\boldsymbol{a}_i$ によって張られる空間である

よって、$\boldsymbol{a}_i$ を基底として用いることができるので、一次元不変部分空間［第 18 章］に関する議論で見たように、A は対角行列で表現できる ■

A は対角化可能 $\Longrightarrow$ 線型独立な A の固有ベクトルが存在

A が対角化可能であることから、ある正則行列 P が存在して、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & O \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

が成り立つので、両辺に P をかけて、

$$AP = P\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & O \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ

ここで、P を n 個の列ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ を横に並べたもの、すなわち、

$$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n)$$

とみなせば、上の等式は、

$$\begin{cases} A\boldsymbol{p}_1 = \alpha_1\boldsymbol{p}_1 \\ A\boldsymbol{p}_2 = \alpha_2\boldsymbol{p}_2 \\ \qquad \vdots \\ A\boldsymbol{p}_n = \alpha_n\boldsymbol{p}_n \end{cases}$$

という関係を意味する

これはすなわち、$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ がそれぞれの固有値 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ に属する A の固有ベクトルであることを意味する

さらに、theorem 11.5「列ベクトルの線型独立性による正則の判定」より、P は正則であるため、その列ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ は線型独立である ■

この定理と、theorem 19.1「異なる固有値に属する固有ベクトルの線型独立性」から、次の定理が得られる

theorem 19.3 - 固有値の相異性と対角化可能性

n 次正方行列 A が異なる n 個の固有値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ をもつならば、A は対角化可能である

すなわち、ある n 次正則行列 P によって、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & O \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ

証明

n 個の異なる固有値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ に属する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ は線型独立である

よって、固有ベクトルの線型独立性より、対角化可能性が導かれる ■

ただし、この定理の逆は成立しない

つまり、n 次正方行列 A が n 個の異なる固有値を持たなくても、対角化できることがある

実際、A がすでに対角行列になっているなら、最も単純な場合として $A = E$ をとると、A の固有値は 1 だけであるが、任意の正則行列 P に対して $P^{-1}EP$ は対角行列 E になる

よって、対角化のために本質的なのは、n 個の異なる固有値ではなく、

n 個の線型独立な固有ベクトル

であるといえる

特性多項式と特性方程式

λ が n 次正方行列 A の固有値であることは、

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$$

となるような $\boldsymbol{x} \in K^n$ が存在することである

ここで、$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を次のように変形することができる

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{0} \\ A\boldsymbol{x} - \lambda E\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{0} \\ (A - \lambda E)\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ という条件により、$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は非自明な解を持つ必要がある

theorem - 固有ベクトルの斉次形方程式による定義

固有値 λ の固有ベクトルとは、斉次形方程式

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

の非自明な解のことである

固有値を求める上で重要となるこの定理は、行列式を使って言い換えることができる

theorem - 固有値の方程式による定義

行列 A の固有値 λ は、x についての n 次方程式

$$\det(A - xE) = 0$$

の K に含まれる解である

証明

λ が A の固有値であることは、斉次形方程式 $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が非自明解を持つことと言い換えられる

そして、theorem 16.13「消去法の原理」より、斉次形方程式が非自明解を持つことは、行列式が 0 になることと同値である

すなわち、

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

が成り立ち、つまり $x = \lambda$ は方程式 $\det(A - xE) = 0$ の解である ■

$A = (a_{ij})$ とおいて、

$$\det(A - xE) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

を展開すると、x についての n 次式になる

特に、すべての列（あるいはすべての行）から、x を含む成分をとった場合の積は、

$$(a_{11} - x)(a_{22} - x) \cdots (a_{nn} - x)$$

であるので、これを展開して現れる項を中心に考察する

n 次の項

$(a_{11} - x)(a_{22} - x) \cdots (a_{nn} - x)$ の各因子から、$-x$ だけを選んでかけ合わせたものが

$$(-1)^n x^n$$

であり、これが最高次の項となる

$n - 1$ 次の項

$(a_{11} - x)(a_{22} - x) \cdots (a_{nn} - x)$ のうち、1 つだけ a_{ii} を選び、残りの因子からは $-x$ を選んでかけ合わせたものが

$$(-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})x^{n-1}$$

である

これは、def 2.2「トレース」より、

$$(-1)^{n-1}\,\mathrm{tr}(A)x^{n-1}$$

とも書き換えられる

$n-2$ 次以下の項

行列式では、各列から 1 つずつ、行に重複がないように成分を選ぶ必要がある
そして、今取り上げている行列式では x を含む成分が対角線上にあるので、$n-1$ 次の場合は、対角成分以外を選ぶことができなかった（対角成分以外から x でない数 a_{ij} を得ようとすると、同じ行もしくは列から 2 つ成分を選ぶことになってしまう）

しかし、$n-2$ 次以下の項では、x を含まない成分を 2 個以上選ぶことができるので、対角成分以外からも成分を選ぶことができる
そのため、$n-2$ 次以下の項は、上の展開式以外からも現れることになり、単純に計算はできない

定数項

定数項は、多項式において $x=0$ とおくことで得られるので、$\det(A-xE)$ に $x=0$ を代入した

$$\det(A)$$

が定数項となる

多項式の最高次の係数に $(-1)^n$ がつくのは面倒なので、$\det(A-xE)$ の代わりに、その $(-1)^n$ 倍である

$$\det(xE-A)$$

を考えることが多い

$(-1)^n$ は x に依存しない定数であり、方程式の解の集合を変えることはないので、どちらの行列式を使っても求まる固有値（0 になる x の値）は同じである

実際、$\det(xE - A)$ を展開すると、

$$\det(xE - A) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix}$$

となり、x の前に (-1) がつかずに済む

def - 特性多項式

A を正方行列、x を変数として、

$$\Phi_A(x) = \det(xE - A)$$

とおく

これを**特性多項式**あるいは**固有多項式**と呼ぶ

theorem - 特性多項式の構造

A を n 次正方行列とすると、特性多項式は、次のような n 次多項式である

$$\Phi_A(x) = x^n - \mathrm{tr}(A)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$$

def - 特性方程式

特性多項式 $\Phi_A(x)$ の根を求める方程式

$$\Phi_A(x) = 0$$

を、**特性方程式**あるいは**固有方程式**と呼ぶ

固有値の重複度

たとえば、次の方程式

$$(x-2)^3(x-1)=0$$

の解は、$x=2$ と $x=1$ である

ここで、左辺を、

$$(x-2)(x-2)(x-2)(x-1)=0$$

とみなすと、

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ x &= 2 \\ x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

というように解が重複していることがわかる

このように、「何回同じ解が現れるか？」を数えたものを**重複度**という

> **def - 方程式の解の重複度**
>
> 多項式 $f(x)$ で表される方程式 $f(x)=0$ において、$f(x)$ が $(x-\alpha)^m$ で割り切れるが、$(x-\alpha)^{m+1}$ では割り切れないような定数 α と自然数 m が存在するとき、α はこの方程式の **m 重解**あるいは **m 重根**であるといい、m を α の**重複度**と呼ぶ

上の定義は難しく聞こえるが、「ちょうど m 回だけ $(x-\alpha)$ がかかっている」ということの言い換えにすぎない

たとえば、

$$(x-2)^3(x-1)$$

を $(x-2)^3$ で割ると、

$$(x-1)$$

として割り切れるが、$(x-2)^4$ で割ると、

$$\frac{(x-2)^3(x-1)}{(x-2)^4}=\frac{x-1}{x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$

というように部分分数分解できるので、余りが出ていることがわかる（多項式の割り算における**余り**とは、$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ の $r(x)$ のことである）

つまり、$f(x)$ に因数 $(x - \alpha)$ が m 個含まれている場合、$f(x)$ は $(x - \alpha)^m$ で割り切れるが、m 個以上は含まれていないので、$(x - \alpha)^{m+1}$ で割ると余りが出てしまう
これはすなわち、「ちょうど m 回だけ $(x - \alpha)$ がかかっている」ということである

特性多項式が

$$\Phi_A(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \cdots (x - \alpha_s)^{k_s}$$

と因数分解できることは、**代数学の基本定理**によって保証されている

theorem - 代数学の基本定理

定数でない任意の 1 変数多項式は、複素計数の 1 次式の積に分解できる

そこで、固有値の**重複度**を次のように定義する

def 19.2 - 固有値の重複度

特性多項式を因数分解して、

$$\Phi_A(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \cdots (x - \alpha_s)^{k_s}$$

とする

ここで、$\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ は相異なるものとする

k_i は 1 以上の整数であり、これを固有値 α_i の**重複度**と呼ぶ

$\Phi_A(x)$ は n 次多項式であるから、

$$\sum_{i=1}^{s} k_i = n$$

が成り立つ

相似な行列の特性多項式

theorem 16.12「行列式の乗法性」より、正方行列 $A,\ B$ が、ある正則行列 P に対して

$$B = P^{-1}AP$$

となる（A と B が **def 13.1**「行列の相似」である）ならば、次のように A と B の特性多項式は一致する

$$\begin{aligned}
\det(xE - B) &= \det\left(xE - P^{-1}AP\right) \\
&= \det\left(xPP^{-1} - P^{-1}AP\right) \\
&= \det\left(P^{-1}P(x - A)\right) \\
&= \det\left(P^{-1}P(xE - A)\right) \\
&= \det(E(xE - A)) \\
&= \det(E)\det(xE - A) \\
&= \det(xE - A)
\end{aligned}$$

> ⚓ **theorem 19.4** - 相似な行列の特性多項式
>
> 相似な行列の特性多項式は一致する

この事実は、すなわち次の事実を意味する

> ⚓ **theorem 19.5** - 相似な行列の固有値
>
> 相似な行列の固有値は重複度も含めて一致する

n 次元正方行列 $A = (a_{ij})$ の特性多項式が、

$$\Phi_A(x) = x^n - \mathrm{tr}(A)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$$

であることを思い出すと、次のことがいえる

⚓ **theorem – 相似な行列のトレースと行列式**

A と B が相似ならば、

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$$
$$\det(A) = \det(B)$$

さらに、A が def 19.1「対角化可能」であるときには、

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

という行列 B と A が相似であるので、

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$
$$\det(A) = \det(B) = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$$

であることがわかる

⚓ **theorem – 対角化可能行列の固有値による不変量の表現**

行列 A が対角化可能であるとき、

- A のトレースは A の固有値の和
- A の行列式は A の固有値の積

さて、A と B が def 13.1「行列の相似」であるとき、theorem 13.3「基底変換に伴う表現行列の変換（線形変換の場合）」より、A と B は 1 つの線形変換 f を異なる基底によって表現して得られた行列であるという関係にある

このとき、A と B の特性多項式が一致するということは、次のように言い換えられる

⚓ theorem – 特性多項式の基底不変性

線形空間 V の線形変換 f に対して、V のある基底に関する表現行列 A の特性多項式 $\Phi_A(x)$ は、基底の選び方によらず f のみによって決まる

対角化可能な行列の特性多項式

A が P によって対角化されたとして、

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_n)$$

とすると、A の特性多項式は、

$$\begin{aligned}
\Phi_A(x) &= \Phi_{P^{-1}AP}(x) \\
&= \det\bigl(xE - P^{-1}AP\bigr) \\
&= \begin{vmatrix} x-c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x-c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-c_n \end{vmatrix} \\
&= (x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_n)
\end{aligned}$$

となる

一般の場合の特性多項式

$$(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_s)^{k_s}$$

と見比べると、各 $1 \leq i \leq s$ に対して、$c_1, \ldots, c_n$ の中には α_i が k_i 個あることがわかる

つまり、対角成分として現れた数たち $c_1, \ldots, c_n$ は、重複度を含めて、特性多項式 $\Phi_A(x)$ の根と一致する

⚓ theorem – 対角化と特性多項式の根

対角化可能な行列 A を対角化して得られる対角行列の対角成分たちは、重複度を含めて特性多項式の根と一致する

また、theorem 19.2「対角化可能性と固有ベクトルの線型独立性」の証明過程を振り返ると、次のようにまとめられる

theorem 19.6 - 対角化行列の列ベクトルと固有ベクトルの対応

対角化可能な行列 A を対角化する正則行列 P の列ベクトルはすべて A の固有ベクトルであり、固有値 α_i のものが k_i 個ある

ここで、k_i は α_i の重複度である

固有空間

線形空間 V の中に、行列の固有ベクトルが「どれくらい」あるかを調べるため、各固有値 α に対して、α の固有ベクトルと $\mathbf{0}$ からなる V の部分集合を考える

α が A の固有値ならば、方程式

$$(\alpha E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

の解空間、すなわち核空間 $\mathrm{Ker}(\alpha E - A)$ は、固有値 α を持つ A の固有ベクトルのすべてと $\mathbf{0}$ からなる

核空間は V の部分空間であり、これを固有値 α の固有空間と呼ぶ

def - 固有空間

α が A の固有値であるとき、

$$W(\alpha) = \mathrm{Ker}(\alpha E - A)$$

を固有値 α の固有空間と呼ぶ

固有空間の次元

theorem 19.7 - 固有空間の次元と固有値の重複度

A の固有値 α_i の重複度 k_i と、固有空間 $W(\alpha_i)$ の次元 $\dim W(\alpha_i)$ に対し、次の不等式が成立する

$$\dim W(\alpha_i) \leq k_i \quad (1 \leq i \leq s)$$

証明

$W(\alpha_i)$ の基底 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$ をとる

theorem 10.6「基底の延長」より、$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が K^n の基底となるように、$n - m$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_{m+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n$ を追加して基底を延長できる

$P = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ とするとき、

$$AP = (A\boldsymbol{v}_1, \dots, A\boldsymbol{v}_m, A\boldsymbol{v}_{m+1}, \dots, A\boldsymbol{v}_n)$$

ここで、$W(\alpha_i)$ の基底 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$ は A の固有ベクトルであるので、固有値と固有ベクトルの定義より、

$$\begin{aligned} AP &= (\alpha_i\boldsymbol{v}_1, \dots, \alpha_i\boldsymbol{v}_m, A\boldsymbol{v}_{m+1}, \dots, A\boldsymbol{v}_n) \\ &= (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n) \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{\quad m \quad} & \overleftrightarrow{\ n-m\ } \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_i & & & \\ & \ddots & & B \\ & & \alpha_i & \\ \hline & O & & C \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow m \\ \updownarrow n-m \end{array} \\ &= P \begin{pmatrix} \alpha_i E_m & B \\ O & C \end{pmatrix} \end{aligned}$$

基底の線型独立性と theorem 11.5「列ベクトルの線型独立性による正則の判定」より、P は正則であるので、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_i E_m & B \\ O & C \end{pmatrix}$$

この行列の特性多項式を考えると、

$$\begin{aligned}
\Phi_{P^{-1}AP}(x) &= \det\left(xE - P^{-1}AP\right) \\
&= \left|\begin{array}{ccc|c} x-\alpha_i & & & \\ & \ddots & & -B \\ & & x-\alpha_i & \\ \hline & O & & xE'-C \end{array}\right| \\
&= \begin{vmatrix} x-\alpha_i & & \\ & \ddots & \\ & & x-\alpha_i \end{vmatrix} \det(xE'-C) \\
&= (x-\alpha_i)^m \det(xE'-C)
\end{aligned}$$

より、固有値 α_i の重複度 k_i は m 以上となる

$$m \leq k_i$$

m は $W(\alpha)_i$ の基底を構成するベクトルの個数、すなわち $\dim W(\alpha_i)$ であるので、

$$\dim W(\alpha_i) \leq k_i$$

が成り立つ ■

この定理の証明過程で登場した特性方程式

$$\Phi_{P^{-1}AP}(x) = (x-\alpha_i)^m \det(xE'-C)$$

において、$\det(xE'-C)$ からも $(x-\alpha_i)$ が現れれば、α_i の重複度 k_i は m より大きくなることがわかる

$W(\alpha)$ の基底を構成するベクトルの個数は、固有値 α に属する線型独立な固有ベクトルの個数ともいえる

また、固有値 α の重複度が k であることは、特性方程式が $x = \alpha$ を k 重解にもつことを意味する

以上をふまえると、前述の定理は、特性方程式の視点で次のように言い換えられる

⚓ theorem – 固有値の重複度と固有ベクトルの最大数

正方行列 A の特性方程式 $\Phi_A(x) = 0$ が $x = \alpha$ を k 重解にもつとき、固有値 α に属する線型独立な固有ベクトルは、k 個以下しかとれない

対角化可能性

次の定理は、

> 各固有値の固有空間が「可能な限り大きい」

ときに限り、対角化可能であると述べている

⚓ theorem 19.8 – 固有空間次元と重複度の一致による対角化可能性

A の固有値を α_i、その重複度を k_i とする

A が対角化可能であることは、次と同値である

$$\dim W(\alpha_i) = k_i \quad (1 \leq i \leq s)$$

証明

対角化可能 $\Longrightarrow$ 固有空間の次元と重複度が一致

A が対角化可能であるので、正則行列 P により $P^{-1}AP$ が対角行列になる

このとき、theorem 19.6「対角化行列の列ベクトルと固有ベクトルの対応」より、P の列ベクトルからなる A の固有ベクトルの集合には、固有値 α_i を持つものが k_i 個含まれる

各 i に対して、k_i 個の線型独立なベクトルが $W(\alpha_i)$ に含まれることになるため、

$$\dim W(\alpha_i) \geq k_i$$

がいえる

一方、theorem 19.7「固有空間の次元と固有値の重複度」より、

$$\dim W(\alpha_i) \leq k_i$$

したがって、

$$\dim W(\alpha_i) = k_i$$

が成り立つ ■

固有空間の次元と重複度が一致 $\Longrightarrow$ 対角化可能

$\dim W(\alpha_i) = k_i$ が成り立つとし、$W(\alpha_i)$ の基底 $\mathcal{V}_i$ をとる

$\mathcal{V}_i$ は k_i 個の元からなり、これらは $W(\alpha_i)$ の基底であることから、線形独立な固有ベクトルである

さらに、theorem 19.1「異なる固有値に属する固有ベクトルの線型独立性」より、$i \neq j$ とし $\mathcal{V}_i$ と $\mathcal{V}_j$ のベクトルは互いに線形独立である

そこで、すべての $\mathcal{V}_i$ を併せた集合

$$\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{V}_i$$

を考えると、$\mathcal{V}$ のベクトルは線型独立である

このとき、$\mathcal{V}$ の元の個数は

$$\sum_{i=1}^{s} k_i = n$$

である

したがって、線型独立な n 個の固有ベクトルが存在するため、theorem 19.2「対角化可能性と固有ベクトルの線型独立性」より、A は対角化可能である ■

次の補題をもとに、対角化可能性を特性方程式の言葉で述べることができる

⚓ **theorem – 特性方程式の単根性と固有空間の次元**

特性方程式 $\Phi_A(x)$ において α_i が単根ならば、すなわち $k_i = 1$ ならば、

$$\dim W(\alpha_i) = 1$$

証明

α_i は固有値なので、$\alpha_i \neq \mathbf{0}$ より、$W(\alpha_i) \neq \{\mathbf{0}\}$ がいえる

これはつまり、

$$\dim W(\alpha_i) \geq 1$$

ということだが、theorem 19.7「固有空間の次元と固有値の重複度」より、

$$\dim W(\alpha_i) \leq k_i = 1$$

も成り立つ

したがって、

$$\dim W(\alpha_i) = 1$$

である ■

⚓ **theorem – 特性方程式の単根性と対角化可能性**

特性方程式 $\Phi_A(x)$ が重根を持たなければ、A は対角化可能である

証明

重根を持たないということは、各固有値の重複度 k_i は 1 である

よって、

$$\dim W(\alpha_i) = 1$$

となり、k_i と $\dim W(\alpha_i)$ が一致するので、A は対角化可能である ■

固有空間分解

[Todo 1:]

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	1