第 20 章

複素行列と対角化

転置行列と随伴行列

複素正方行列 A の転置行列において、各成分をその共役複素数に置き換えた行列を随伴行列という

def - 随伴行列

複素正方行列 $A = (a_{ij})$ に対し、$\overline{a_{ji}}$ を (i, j) 成分にもつ行列 ${}^t\overline{A}$ を A の随伴行列といい、A^* と表す

実数 x の複素共役は $\overline{x} = x$ であるので、A が実行列のときは、

$$A^* = {}^tA$$

すなわち、

> 実行列の世界では、随伴行列は転置行列

にすぎない

転置と似た性質

theorem 2.3「転置操作の反復不変性」より、転置を二回行うと元に戻る。

このことと同様に、次が成り立つ

theorem 20.1 - 随伴行列の自己反転性

複素正方行列 A に対し、随伴行列を二回とると元に戻る

$$(A^*)^* = A$$

証明

随伴行列の定義より、

$$(A^*)^* = {}^t\overline{A^*} = {}^t\overline{{}^t\overline{A}}$$

$A = (a_{ij})$ とすると、A の各成分を共役複素数にした行列は、

$$\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$$

これを転置すると、

$${}^t\overline{A} = (\overline{a_{ji}})$$

さらに、もう一度各成分の複素共役をとると、

$${}^t\overline{{}^t\overline{A}} = (\overline{\overline{a_{ji}}}) = (a_{ji})$$

したがって、

$$(A^*)^* = {}^t\overline{{}^t\overline{A}} = (a_{ij}) = A$$

が成り立つ ■

theorem 20.2 - 積に対するエルミート共役の順序反転性

複素行列 A B の積 AB が定義できるとき、

$$(AB)^* = B^*A^*$$

証明

[Todo 1:]

随伴による内積の表現

def 14.4「$\mathbb{C}^n$ 上の内積（標準内積）」は、随伴を用いて表現することもできる

theorem 20.3 – 随伴による標準内積の表現

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}^* \cdot \boldsymbol{a}$$

証明

theorem 14.3「標準内積の対称性」より、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}$$

ここで、theorem 14.4「転置による内積の表現」より、右辺の内積を転置を用いて表すと、

$$\overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})} = \overline{\boldsymbol{b}^\top \cdot \overline{\boldsymbol{a}}} = \overline{\boldsymbol{b}^\top} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{a}}} = \boldsymbol{b}^* \cdot \boldsymbol{a}$$

よって、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})} = \boldsymbol{b}^* \cdot \boldsymbol{a}$$

が成り立つ ■

随伴公式

随伴行列と def 14.4「$\mathbb{C}^n$ 上の内積（標準内積）」は、次のような関係で結ばれる

theorem 20.4 – 随伴公式

複素行列 A と計量空間上のベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ に対し、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A^*\boldsymbol{v})$$

証明

theorem 14.4「転置による内積の表現」より、転置を用いて内積を表すと、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t(A\boldsymbol{u})\overline{\boldsymbol{v}}$$

theorem 2.4「転置と行列積の順序反転性」より、${}^t(A\boldsymbol{u}) = {}^t\boldsymbol{u}{}^tA$ なので、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = ({}^t\boldsymbol{u}{}^tA)\overline{\boldsymbol{v}}$$

行列の積の結合法則を用いて、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{u}({}^tA\overline{\boldsymbol{v}})$$

ここで、$\overline{{}^t\overline{A}}$ は、$A = (a_{ij})$ とすると、

1. $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$
2. ${}^t\overline{A} = (\overline{a_{ji}})$
3. $\overline{{}^t\overline{A}} = (\overline{\overline{a_{ji}}}) = (a_{ji}) = {}^tA$

となり、${}^tA$ と一致する

これを用いて書き換えると、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{u}(\overline{{}^t\overline{A}}\overline{\boldsymbol{v}})$$

複素共役の積の性質 $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}$ を用いて、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{u}\overline{{}^t\overline{A}\boldsymbol{v}}$$

この時点で、右辺を内積として書き直すと、$A\boldsymbol{v}$ の複素共役がなくなることに注意して、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, {}^t\overline{A}\boldsymbol{v})$$

随伴行列の定義 $A^* = {}^t\overline{A}$ より、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A^*\boldsymbol{v})$$

となり、目的の等式が得られた ■

ユニタリ行列と直交行列

def 20.1 - ユニタリ行列

複素正方行列 A が次を満たすとき、A を**ユニタリ行列**という

$$A^* = A^{-1}$$

ユニタリ行列と内積

2 つのベクトルそれぞれにユニタリ行列を左からかけても、それらの内積は変わらない

theorem 20.5 - ユニタリ行列の特徴づけとしての内積不変性

n 次複素行列 A がユニタリ行列であることと、任意の $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対し、

$$(A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

が成り立つことは同値である

証明

ユニタリ行列ならば内積を保つ

随伴公式より、

$$(A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A^*A\boldsymbol{v})$$

ここで、A がユニタリ行列であることは、

$$A^*A = E$$

と言い換えられるので、これを用いると、

$$(A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

が成り立つ ■

内積を保つならばユニタリ行列

転置を用いて内積を表すと、

$$(A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = {}^t(A\boldsymbol{u})\overline{(A\boldsymbol{v})}$$
$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{u}\overline{\boldsymbol{v}}$$

これらが一致するというのが仮定なので、

$${}^t(A\boldsymbol{u})\overline{(A\boldsymbol{v})} = {}^t\boldsymbol{u}\overline{\boldsymbol{v}}$$

この関係を用いて、行列 ${}^tA\overline{A}$ の (i, j) 成分を考えると、

$$\begin{aligned} {}^t(A\boldsymbol{e}_i)\overline{(A\boldsymbol{e}_j)} &= {}^t\boldsymbol{e}_i\overline{\boldsymbol{e}_j} \\ &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

となり、これはすなわち、

$${}^tA\overline{A} = E$$

よって、両辺の複素共役をとることで、

$$A^*A = E$$

を得る

したがって、A はユニタリ行列である ■

この定理において、$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ の場合を考えると、ユニタリ行列とノルムに関する性質が導かれる

ユニタリ行列とノルム

ユニタリ行列を左からかけても、ベクトルのノルムは変わらない

theorem 20.6 - ユニタリ行列の特徴づけとしてのノルム不変性

n 次複素行列 A がユニタリ行列であることと、任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対し、

$$\|A\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{v}\|$$

が成り立つことは同値である

証明

A がユニタリ行列であることと、任意の $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対し、

$$(A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

が成り立つことは同値であった

ここで、$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ とすると、

$$(A\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$$

が成り立つことになり、ノルムの定義より、

$$\|A\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{v}\|^2$$

すなわち、

$$\|A\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{v}\|$$

がしたがう ■

ユニタリ行列と直交性

A が実正方行列のときは、

$$A \text{ がユニタリ行列} \iff {}^tA = A^{-1}$$

となり、このような A は直交行列と呼ばれる

def - 直交行列

実正方行列 A が次を満たすとき、A を直交行列という

$${}^tA = A^{-1}$$

直交行列という名前の由来は、次のように考えられる

A を n 個の列ベクトルを横一列に並べたものとみなし、

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

とおくと、${}^tA = A^{-1}$、すなわち ${}^tAA = E$ は、

$$\begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1 \\ {}^t\boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

と表される

これは、ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が、次の性質

$${}^t\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j = (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$$

を満たすことを意味する

すなわち、直交行列 A の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は、互いに直交する単位ベクトルである

この事実は、複素行列に対しても成立する

theorem 20.7 - ユニタリ行列の列ベクトルの直交正規性

複素正方行列 A を $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ と列ベクトル分解するとき、

$$A \text{ がユニタリ行列} \iff (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$$

すなわち、ユニタリ行列の列ベクトルは、互いに直交する単位ベクトルである

証明

A がユニタリ行列であることは、任意の $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対し、

$$(A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

が成り立つことと同値であった

ここで、$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_j$ とすると、

$$(A\boldsymbol{e}_i, A\boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$$

が成り立つことになる

左辺の $A\boldsymbol{e}_i$ について考えると、

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{e}_i &= (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \\
&= \boldsymbol{a}_i
\end{aligned}
$$

$A\boldsymbol{e}_j$ についても同様なので、

$$
\begin{aligned}
(A\boldsymbol{e}_i, A\boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij} \\
\therefore \quad (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}
\end{aligned}
$$

となり、A がユニタリ行列であることは、$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$ へと同値変形できる ■

ユニタリ行列と随伴・転置

theorem - ユニタリ行列の随伴不変性

ユニタリ行列 U の随伴行列 U^* もユニタリ行列である

証明

theorem 20.1「随伴行列の自己反転性」より、随伴行列を二回とると元に戻るので、

$$
(U^*)^* = U
$$

また、ユニタリ行列の定義より、

$$
U^* = U^{-1}
$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
(U^*)^* &= U \\
U &= (U^*)^{-1}
\end{aligned}
$$

すなわち、

$$U^* = (U^*)^{-1}$$

となるので、U^* もユニタリ行列である ■

上の定理は、実行列の世界では、次の定理に対応する

theorem 20.8 - 直交行列の転置不変性

直交行列 Q の転置行列 ${}^tQ$ も直交行列である

エルミート行列と対称行列

def - エルミート行列

複素正方行列 A が次を満たすとき、A を**エルミート行列**という

$$A^* = A$$

A が実正方行列のときは、

$$A \text{ がエルミート行列} \iff {}^tA = A$$

となり、このような A は def 2.1「対称行列」、あるいは**実対称行列**と呼ばれる

エルミート行列の固有値

行列の成分が実数であっても、特性方程式の根は一般には実数とは限らない

つまり、固有値は一般には複素数であるが、エルミート行列については次が成り立つ

theorem 20.9 - エルミート行列の固有値の実数性

エルミート行列の固有値はすべて実数である

証明

エルミート行列 A の固有ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とし、その固有値を $\alpha \in \mathbb{C}^n$ とすると、

$$A\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v}$$

より、次が成り立つ

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) &= (\alpha\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \\ &= \alpha(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})\end{aligned}$$

一方、theorem 20.4「随伴公式」から、次のようにも書ける

$$(A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, A^*\boldsymbol{v})$$

A がエルミート行列であることから、$A^* = A$ なので、

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) &= (\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}) \\ &= (\boldsymbol{v}, \alpha\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

theorem 14.5「内積の共役線形性」に注意して、

$$(A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \overline{\alpha}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$$

ここまでで得られた $(A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ の 2 通りの表現をまとめると、

$$\alpha(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \overline{\alpha}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$$

移項して、

$$(\alpha - \overline{\alpha})(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$$

ここで、$\boldsymbol{v}$ は固有ベクトルなので、$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ である

よって、$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \neq 0$ で両辺を割ることができ、次を得る

$$\alpha = \overline{\alpha}$$

すなわち、α は実数である ■

エルミート行列では、固有値が実数であることがうまく活きて、次の性質も成り立つ

theorem 20.10 – エルミート行列の固有値の直交性

エルミート行列の相異なる固有値を持つ固有ベクトルは直交する

すなわち、エルミート行列 A の固有ベクトル $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}$ がそれぞれ固有値 $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^n$ を持つとし、$\alpha \neq \beta$ ならば、

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$$

が成り立つ

証明

固有値と固有ベクトルの定義より、

$$A\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{u}$$
$$A\boldsymbol{v} = \beta\boldsymbol{v}$$

が成り立つ

一方、theorem 20.4「随伴公式」より、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A^*\boldsymbol{v})$$

であるが、A はエルミート行列なので、$A^* = A$ が成り立つ

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v})$$

先ほどの固有値と固有ベクトルの関係を代入して、

$$(\alpha\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \beta\boldsymbol{v})$$

ここで、$\alpha,\ \beta$ は実数なので、theorem 14.5「内積の共役線形性」を考慮しても、

$$\alpha(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \beta(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

として、スカラーをそのまま外に出すことができる

よって、

$$(\alpha - \beta)(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$$

であるが、$\alpha \neq \beta$ なので、$(\alpha - \beta) \neq 0$ で両辺を割ることができ、

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$$

を得る ■

エルミート行列の対角化に向けた考察

H を n 次エルミート行列とすると、その固有値は n 個の実数として $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ とおける

そして、α_i に属する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ をとると、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ はどの 2 つも互いに直交する

そこで、それぞれを次のように正規化する

$$\boldsymbol{u}_i = \frac{\boldsymbol{v}_i}{\|\boldsymbol{v}_i\|} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

すると、$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は互いに直交する単位ベクトルであるので、

$$U = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$$

とおけば、theorem 20.7「ユニタリ行列の列ベクトルの直交正規性」より、U はユニタリ行列となる

$\boldsymbol{u}_i$ は H の各固有ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ をスカラー倍したものなので、

$$H\boldsymbol{u}_i = \alpha_i \boldsymbol{u}_i$$

という関係が成り立つ

つまり、U の列ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ はそれぞれ H の固有値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ に属する固有ベクトルである

さらに、ユニタリ行列はその theorem 20.1「ユニタリ行列」から明らかに正則行列であるので、theorem 19.6「対角化行列の列ベクトルと固有ベクトルの対応」を振り返ると、

> エルミート行列はユニタリ行列を用いて対角化できる

という「予感」がしてくる

まだ「予感」としかいえないのは、エルミート行列の固有値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ が重複している可能性があるからである

正規行列

エルミート行列の対角化について議論するために、エルミート行列・ユニタリ行列を含むより包括的な概念として正規行列を導入する

def - 正規行列

複素正方行列 A が次を満たすとき、A を正規行列という

$$AA^* = A^*A$$

正規行列の例

A をエルミート行列とすると、$A^* = A$ なので、

$$AA^* = A^2$$
$$A^*A = A^2$$

となり、正規行列の定義を満たす

theorem - エルミート行列の正規行列性

エルミート行列は正規行列である

また、A をユニタリ行列とすると、$A^* = A^{-1}$ なので、

$$AA^* = AA^{-1} = E$$
$$A^*A = A^{-1}A = E$$

となり、こちらも正規行列の定義を満たす

theorem - ユニタリ行列の正規行列性

ユニタリ行列は正規行列である

正規行列の性質

theorem - 正規行列と随伴によるノルム保存性

複素正方行列 A が正規行列であることは、任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対し、

$$\|A\boldsymbol{v}\| = \|A^*\boldsymbol{v}\|$$

が成り立つことと同値である

証明

[Todo 2: book: 行列と行列式の基礎 p262 問 6.9 (1)]

theorem - 正規行列における固有ベクトルの随伴対応

A を正規行列とするとき、$\boldsymbol{v}$ が A の固有値 α の固有ベクトルならば、$\boldsymbol{v}$ は A^* の固有値 $\overline{\alpha}$ の固有ベクトルである

すなわち、

$$A\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v} \Longrightarrow A^*\boldsymbol{v} = \overline{\alpha}\boldsymbol{v}$$

証明

[Todo 3: book: 行列と行列式の基礎 p262 問 6.9 (2)]

正規行列の対角化

A の固有値 α に属する線型独立な固有ベクトルがちょうど k 個存在することは、

$$\dim\{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}\} = k$$

と表せる

これは、固有値 α の固有空間の次元が k であること、噛み砕くと、固有値 α の固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ の集合が部分空間であり、k 個の固有ベクトルがこの部分空間の基底を成す（線型独立である）ことを意味する

固有空間は核空間 $\mathrm{Ker}(A - \alpha E)$ と定義されるため、この次元が k であることは、次のようにも書ける

$$\dim \mathrm{Ker}(A - \alpha E) = k$$

正規行列について、一般に次が成り立つ

⚓ theorem 20.11 - 正規行列における固有空間の次元と固有値の重複度の一致

n 次複素正方行列 A が正規行列であるとき、$\Phi_A(x)$ における固有値 α の重複度 k について、次の等式が成り立つ

$$k = n - \mathrm{rank}(A - \alpha E)$$

theorem 11.2「線形写像の次元定理」を用いて言い換えると、α の固有空間 $W(\alpha)$ について、

$$\dim W(\alpha) = k$$

が成り立つ

証明

$l = n - \mathrm{rank}(A - \alpha E)$ とおく（l が重複度 k に等しいことを示すことが目標）

すなわち、

$$\mathrm{rank}(A - \alpha E) = n - l$$

であると仮定する

また、固有値 α の固有ベクトルは、斉次形方程式

$$(A-\alpha E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

の非自明解である

この方程式の解空間は $\mathrm{Ker}(A-\alpha E)$ であるが、次元定理より、

$$\dim \mathrm{Ker}(A-\alpha E)=n-\mathrm{rank}(A-\alpha E)=l$$

であるので、$\mathrm{Ker}(A-\alpha E)$ は次元 l の部分空間である

すなわち、方程式 $(A-\alpha E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を満たす l 個の線型独立なベクトルが存在する

これらを $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_l$ とすると、これらはすべて固有値 α の固有ベクトルである

これらが正規直交系でない場合は、グラム・シュミットの直交化法を用いて正規直交系に変換し、それを改めて $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_l$ とする

次に、これら l 個のベクトルを補う形で、正規直交基底 $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_l,\boldsymbol{v}_{l+1},\ldots,\boldsymbol{v}_n$ を作る

これらを用いて、行列 U を

$$U=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_l,\boldsymbol{v}_{l+1},\ldots,\boldsymbol{v}_n)$$

とおくと、U はユニタリ行列である

さらに、$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_l$ は A の固有値 α に属する固有ベクトルであることから、

$$U^{-1}AU=\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \quad\overset{l}{\longleftrightarrow}\quad & \quad\overset{n-l}{\longleftrightarrow}\quad \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & & & \\ & \ddots & & B \\ & & \alpha & \\ \hline & O & & C \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow l \\ \\ \\ \updownarrow n-l \end{array} \end{array}$$

ユニタリ行列 U の定義より、$U^{-1}=U^*$ が成り立つので、

$$U^*AU=\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \quad\overset{l}{\longleftrightarrow}\quad & \quad\overset{n-l}{\longleftrightarrow}\quad \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & & & \\ & \ddots & & B \\ & & \alpha & \\ \hline & O & & C \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow l \\ \\ \\ \updownarrow n-l \end{array} \end{array}$$

ここで、両辺の随伴行列をつくることを考える

左辺は、theorem 20.2「積に対するエルミート共役の順序反転性」より、積の随伴行列をつくると積の順序が入れ替わることに注意して、

$$(U^*AU)^* = U^*A^*(U^*)^* = U^*A^*U$$

右辺は、転置してから各成分を共役複素数に置き換えればよいので、

$$U^*A^*U = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overset{l}{\longleftrightarrow} & \overset{n-l}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{\alpha} & & & \\ & \ddots & & O \\ & & \overline{\alpha} & \\ \hline & B^* & & C^* \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \updownarrow l \\ \updownarrow n-l \end{array}$$

一方、A が正規行列であることから、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_l$ は、A^* の固有値 $\overline{\alpha}$ に属する固有ベクトルでもあるので、

$$U^{-1}A^*U = U^*A^*U = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overset{l}{\longleftrightarrow} & \overset{n-l}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{\alpha} & & & \\ & \ddots & & B' \\ & & \overline{\alpha} & \\ \hline & O & & C' \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \updownarrow l \\ \updownarrow n-l \end{array}$$

とも表せる

ここで、B と C は $l \times (n-l)$ 型行列、B' と C' は $(n-l) \times l$ 型行列であり、型が一致するので成分を比較できる

よって、

$$B^* = O, \quad C^* = C'$$

0 の複素共役は 0 であることから、$B^* = O$ より、

$$B = O$$

がしたがう

このことをふまえて、あらためて U^*AU を表すと、

$$
U^*AU = \begin{array}{cl}
\begin{array}{cc} \overset{l}{\longleftrightarrow} & \overset{n-l}{\longleftrightarrow} \end{array} & \\
\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & & & \\ & \ddots & & O \\ & & \alpha & \\ \hline & O & & C \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow l \\ \\ \\ \updownarrow n-l \end{array}
\end{array}
$$

となる

ここで、theorem 19.4「相似な行列の特性多項式」より、A と U^*AU の特性多項式は一致するので、実際に計算すると、

$$
\begin{aligned}
\det(xE - A) &= \det(xE - U^*AU) \\
&= \left|\begin{array}{ccc|c} x-\alpha & & & \\ & \ddots & & O \\ & & x-\alpha & \\ \hline & O & & xE_{n-l} - C \end{array}\right| \\
&= \left|\begin{array}{ccc} x-\alpha & & \\ & \ddots & \\ & & x-\alpha \end{array}\right| \det(xE_{n-l} - C) \\
&= (x-\alpha)^l \det(xE_{n-l} - C)
\end{aligned}
$$

また、$\alpha E - U^*AU$ を考えると、

$$
\alpha E - U^*AU = \begin{array}{cl}
\begin{array}{cc} \overset{l}{\longleftrightarrow} & \overset{n-l}{\longleftrightarrow} \end{array} & \\
\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & & & \\ & \ddots & & O \\ & & 0 & \\ \hline & O & & \alpha E_{n-l} - C \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow l \\ \\ \\ \updownarrow n-l \end{array}
\end{array}
$$

より、

$$
\mathrm{rank}(\alpha E - U^*AU) = \mathrm{rank}(\alpha E_{n-l} - C)
$$

ここで、A と U^*AU は相似な行列であり、theorem 19.5「相似な行列の固有値」より、相似な行列の固有値（特性方程式の根）は重複度も含めて一致するので、

$$
\mathrm{rank}(\alpha E - U^*AU) = \mathrm{rank}(\alpha E - A) = n - l
$$

よって、

$$\mathrm{rank}(\alpha E_{n-l} - C) = n - l$$

$\alpha E_{n-l} - C$ は行列の階数が次数 $n - l$ に等しいので、theorem 11.4「階数による正則の判定」より、正則行列である

ゆえにその行列式は、

$$\det(\alpha E_{n-l} - C) \neq 0$$

となることから、$x = \alpha$ は方程式 $\det(xE_{n-l} - C) = 0$ の解ではないことがわかる

よって、$\det(xE - A) = 0$ の解 $x = \alpha$ は、$(x - \alpha)^l$ の部分から現れることになるため、$x = \alpha$ は l 重解である

したがって、α の重複度 k は l に等しいことが示された ■

theorem 19.8「固有空間次元と重複度の一致による対角化可能性」より、正規行列は対角化可能である

さらに、上の定理の証明過程から、正規行列はユニタリ行列によって対角化できることもわかる

theorem 20.12 - 正規行列のユニタリ対角化

複素正方行列 A について、A が正規行列であることと、A がユニタリ行列を用いて対角化できることは同値である

証明

正規行列 $\Longrightarrow$ ユニタリ行列を用いて対角化可能

theorem 20.11「正規行列における固有空間の次元と固有値の重複度の一致」の定理の証明過程より明らか ■

ユニタリ行列を用いて対角化可能 $\Longrightarrow$ 正規行列

A がユニタリ行列 U を用いて、次のように対角化されたとする

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

このとき、両辺に左から U をかけ、右から U^* をかけると、ユニタリ行列の定義より $U^*U = UU^* = E$ であることから、

$$A = U \begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix} U^*$$

と変形できる

よって、A^* は、theorem 20.2「積に対するエルミート共役の順序反転性」より、積の随伴行列をつくると積の順序が入れ替わることに注意して、

$$\begin{aligned} A^* &= (U^*)^* \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} U^* \\ &= U \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} U^* \end{aligned}$$

以上をふまえて、AA^* と A^*A をそれぞれ計算すると、

$$\begin{aligned} AA^* &= U \begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix} U^*U \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} U^* \\ &= U \begin{pmatrix} \alpha_1\overline{\alpha_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n\overline{\alpha_n} \end{pmatrix} U^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^*A &= U \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} U^*U \begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix} U^* \\ &= U \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1}\alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \overline{\alpha_n}\alpha_n \end{pmatrix} U^* \end{aligned}$$

となり、$\alpha_i\overline{\alpha_i} = \overline{\alpha_i}\alpha_i$ なので、たしかに、

$$AA^* = A^*A$$

が成り立つ

これは、A が正規行列であることを意味する ■

実対称行列の対角化

エルミート行列は正規行列なので、次のことがいえる

theorem – エルミート行列のユニタリ対角化

エルミート行列はユニタリ行列を用いて対角化できる

この定理を実行列の世界にもってくると、次のようになる

theorem – 実対称行列の直交対角化

実対称行列は直交行列を用いて対角化できる

Zebra Notes

Type	Number
todo	3