第 3 章

対角行列と三角行列

対角行列とスカラー行列

def – 対角行列

対角成分以外の成分がすべて 0 である正方行列を**対角行列**と呼ぶ

$a_{ii} = c_i \quad (1 \leq i \leq n)$ である対角行列を次のように表す

$$\mathrm{diag}(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

対角行列の特別な場合として、すべての対角成分が同じ値である行列は**スカラー行列**と呼ばれる

def – スカラー行列

c をスカラーとするとき、cE の形の行列を**スカラー行列**という

$$cE = \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix}$$

対角行列とスカラー倍

行列 A にスカラー行列をかけることは、

$$(cE)A = A(cE) = cA$$

のように、スカラー c をかけるのと同じである

発展して、対角行列の場合には次のことがいえる

theorem - 対角行列と列ベクトルのスカラー倍

右から対角行列をかけると、各列ベクトルがスカラー倍になる

すなわち、$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n)$ とすると、

$$A \cdot \mathrm{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n) = (c_1\boldsymbol{a}_1, c_2\boldsymbol{a}_2, \dots, c_n\boldsymbol{a}_n)$$

が成り立つ

証明

[Todo 1: book: 行列と行列式の基礎 p63 （問 2.8）]

ブロック対角行列

対角行列の概念は、行列の各成分が数ではなく行列の場合にも拡張できる

def – ブロック対角行列

対角線上のブロックがすべて正方行列で、それ以外のブロックが零行列であるものをブロック対角行列という

$$\mathrm{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_k) = \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_k \end{pmatrix}$$

ここで、対角成分に対応する行列 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ を対角ブロックという

対角行列の嬉しさ：入出力の視点

ベクトルと行列を使うことで、入力 $\boldsymbol{x}$ と出力 $\boldsymbol{y}$ の関係を多次元の場合でも簡潔に表すことができる

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$$

一般の行列による入出力

たとえば $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ をともに 3 次元ベクトルとすると、$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ は、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

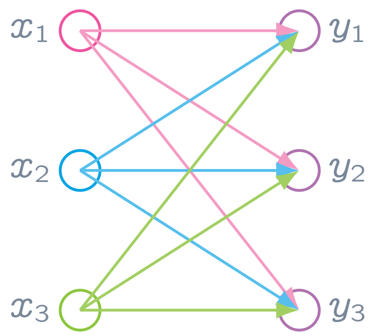
ここで、たとえば 2 行目に注目すると、

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

となり、y_2 の計算に $\boldsymbol{x}$ のすべての成分 x_1, x_2, x_3 が使われていることがわかる

> 各行に対応する出力 y_i は、入力 $\boldsymbol{x}$ のすべての成分に依存している

この依存関係を、次のようなダイアグラムで表すことにする

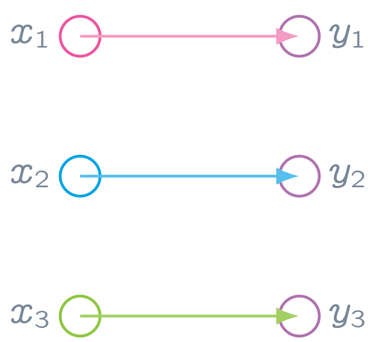


対角行列による入出力

A が対角行列の場合、$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ は次のような形になる

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{22}x_2 \\ a_{33}x_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ベクトルの各行に注目すると、各出力 y_i は、入力 $\boldsymbol{x}$ の対応する成分 x_i のみに依存していることがわかる



このように、A が対角行列の場合、$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ は独立な n 本のサブシステム

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 \\
&\vdots \\
y_n &= a_{nn}x_n
\end{aligned}
$$

に分割されている

つまり、対角行列を使って関係を表現できれば、

> 見た目は n 次元問題でも、実質は 1 次元問題が n 本あるだけ

という状況になり、問題を大きく単純化できる

ブロック対角行列による入出力

ブロック対角行列は、

> 各ブロックごとに独立に変換される

という形の写像を表している

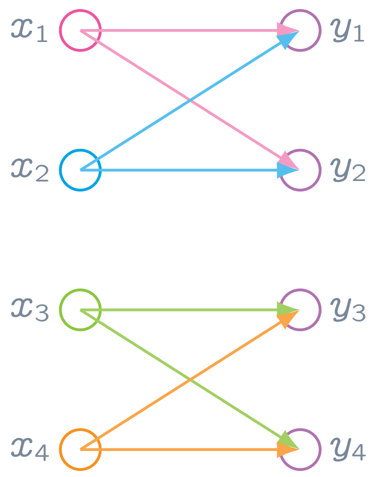
たとえば、

$$
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}
$$

というブロック対角行列は、次のように分けて考えることができる

$$
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
$$
$$
\begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}
$$

ダイアグラムで表すと、2 つの独立なサブシステムに分解されている様子が見える



対角行列の嬉しさ：冪乗の計算

A が対角行列の場合、$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ は、行ごとのサブシステムとして各行を独立に計算できた

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 \\ &\vdots \\ y_n &= a_{nn}x_n \end{aligned}$$

このように各行に分けて「1 次元問題が n 本あるだけ」と考えると、対角行列どうしの積や冪乗も、簡単に計算できることがわかる

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_nb_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^k \end{pmatrix}$$

三角行列

theorem 3.1 - 上三角行列の積

上三角行列どうしの積は上三角行列となる

証明

[Todo 2:]

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	2