第 16 章

行列式

二元連立一次方程式の解の判別式

連立方程式を解く方法の一つとして、方程式の両辺を足したり引いたりして、文字を消去することで解を求める加減法という手法がある。

次の x, y に関する連立一次方程式を、加減法で解く過程を追いかけてみよう。

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = p_1 \\ a_2x + b_2y = p_2 \end{cases}$$

y を消去して x を求める

y を消去するには、次のようにすればよい。

$$1 \text{ つ目の式} \times b_2 - 2 \text{ つ目の式} \times b_1$$

こうすることで、x のみに関する方程式が得られる。

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = p_1b_2 - p_2b_1$$

ここで、x の係数 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ であれば、

$$x = \frac{p_1b_2 - p_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

として、解を求められる。

逆に、$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ であれば、解を一意に求めることはできない。

この意味で、$a_1b_2 - a_2b_1$ はこの連立方程式の解の判別式のような役割を持っているといえる。この重要な量を一旦 Δ_2 とおくことにしよう。

$$\Delta_2 = a_1b_2 - a_2b_1$$

x を消去して y を求める

x を消去するには、次のようにすればよい。

$$1 \text{ つ目の式} \times a_2 - 2 \text{ つ目の式} \times a_1$$

こうすることで、y のみに関する方程式が得られる。

$$(a_2b_1 - a_1b_2)y = p_2a_1 - p_1a_2$$

ここでも、y の係数 $a_2b_1 - a_1b_2$ の値によって、解を求められるかどうかが変わってくる。この y の係数は、先ほど導入した Δ_2 を用いると、次のように表せる。

$$a_2b_1 - a_1b_2 = -(a_1b_2 - a_2b_1) = -\Delta_2$$

x を消去して y を求める（式を入れ替えた場合）

x を消去する前に、あえて式の順番を入れ替えた場合を考えてみよう。

$$\begin{cases} a_2x + b_2y = p_2 \\ a_1x + b_1y = p_1 \end{cases}$$

すると、x を消去するには、

$$1 \text{ つ目の式} \times a_1 - 2 \text{ つ目の式} \times a_2$$

とすればよいことになる。

これより得られる y についての方程式は、次のようになる。

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = p_1a_2 - p_2a_1$$

この場合、y の係数は、

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \Delta_2$$

となり、今度はマイナスの符号がつかない Δ_2 そのものになっている。

どうやら、

式の順番を入れ替えたら、判別式 Δ_2 の符号が反転する

ようだ。(このことは後の議論への伏線として、頭の片隅に置いておこう。)

係数行列と二次行列式

先ほどの連立一次方程式を、行列を使って表すと次のようになる。

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}}_{\text{係数行列 } A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

すると、この連立一次方程式の解の判別式として導入した、

$$\Delta_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

という量は、係数行列 A の成分だけで決まるものだとわかる。

そこで、この Δ_2 を 2 次正方行列 A の行列式と呼ぶことにし、次のように表す。

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

def - 二次正方行列の行列式

2 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、A の行列式 $\det(A)$ を次のように定義する。

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

加減法の操作と二次行列式の覚え方

そもそも Δ_2 は、次の連立一次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = p_1 \\ a_2x + b_2y = p_2 \end{cases}$$

において、

$$1 \text{ つ目の式} \times b_2 - 2 \text{ つ目の式} \times b_1$$

という操作を行うことで現れたものだった。

この加減法の操作をイメージして、2 次正方行列の行列式は「係数を交差させるようにかけて引く」と覚えるとよい。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

係数を交差させるようにかけて引く

三元連立一次方程式の解の判別式

今度は、3 つの変数 x, y, z に関する連立一次方程式を加減法で解くことで、2 変数の場合と同様に解の判別式と呼べるものを求めてみよう。

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = p_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = p_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = p_3 \end{cases}$$

なお、その過程ではおびただしい式展開が登場するが、途中式を完璧に追う必要はない。

重要なのは、何をしようとしてどんな結果が現れるかということである。

$x \longrightarrow y$ の順に消去して z を求める

まず、1 つ目の式と 2 つ目の式を用いて、x を消去する。

$$2 \text{ つ目の式} \times a_1 - 1 \text{ つ目の式} \times a_2$$

とすることで、y, z に関する方程式が 1 本得られる。

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y + (a_1c_2 - a_2c_1)z = a_1p_2 - a_2p_1$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

2 変数 y, z に関する方程式が 1 本だけでは解を求めることはできないので、y, z に関する方程式をもう 1 本作りたい。

そこで、今度は 2 つ目の式と 3 つ目の式を用いて、x を消去する。

$$3\text{ つ目の式} \times a_2 - 2\text{ つ目の式} \times a_3$$

とすることで、y, z に関する別な方程式が得られる。

$$(a_2b_3 - a_3b_2)y + (a_2c_3 - a_3c_2)z = a_3p_2 - a_2p_3$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

式が長くなってしまうので、ここで、

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1b_2 - a_2b_1, & B_1 &= a_1c_2 - a_2c_1, & P_1 &= a_1p_2 - a_2p_1 \\ A_2 &= a_2b_3 - a_3b_2, & B_2 &= a_2c_3 - a_3c_2, & P_2 &= a_3p_2 - a_2p_3 \end{aligned}$$

とおいて、ここまでで得られた y, z に関する 2 本の方程式を次のように整理しよう。

$$\begin{cases} A_1y + B_1z = P_1 \\ A_2y + B_2z = P_2 \end{cases}$$

ここからさらに y を消去するには、次のようにすればよい。

$$2\text{ つ目の式} \times A_1 - 1\text{ つ目の式} \times A_2$$

こうして、z に関する方程式が得られる。

$$(A_1B_2 - A_2B_1)z = A_1P_2 - A_2P_1$$

これを z について解けば、z を求めることができる。

左辺の z の係数を展開すると、

$$
\begin{aligned}
&A_1B_2 - A_2B_1 \\
&= (a_1b_2 - a_2b_1)(a_2c_3 - a_3c_2) - (a_2b_3 - a_3b_2)(a_1c_2 - a_2c_1) \\
&= a_1b_2a_2c_3 - \cancel{a_1b_2a_3c_2} - a_2b_1a_2c_3 + a_2b_1a_3c_2 \\
&\quad - a_2b_3a_1c_2 + a_2b_3a_2c_1 + \cancel{a_3b_2a_1c_2} - a_3b_2a_2c_1 \\
&= a_1a_2(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_2a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\
&= a_2\left\{a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)\right\}
\end{aligned}
$$

また、右辺を展開すると、

$$
\begin{aligned}
&A_1P_2 - A_2P_1 \\
&= (a_1b_2 - a_2b_1)(a_3p_2 - a_2p_3) - (a_2b_3 - a_3b_2)(a_1p_2 - a_2p_1) \\
&= a_1b_2a_3p_2 - a_1b_2a_2p_3 - a_2b_1a_3p_2 + a_2b_1a_2p_3 \\
&\quad - a_2b_3a_1p_2 + a_2b_3a_2p_1 + \cancel{a_3b_2a_1p_2} - \cancel{a_3b_2a_2p_1} \\
&= a_2\left\{a_1b_2p_2 - a_1b_2p_3 + b_1a_3p_2 - b_1a_2p_3 + b_3a_1p_2 - a_2b_3p_1\right\}
\end{aligned}
$$

$a_2 \neq 0$ ならば、両辺を a_2 で割ることができる。

すると、$z = \cdots$ の形にしたときの分母には次の式が現れる。

この式が 0 でなければ、z を一意に求めることができるので、これを**判別式** Δ_3 としよう。

$$
\Delta_3 = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)
$$

二次行列式に帰着させた見方

この式は、次のように 2 次行列式を用いて表記できる。

$$
\Delta_3 = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad
\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad
\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}
$$

このように 2 次の行列式に帰着させた見方は、**余因子展開**として後に学ぶ。

三次行列式としての見方

また、次のように括弧を展開することもできる。

$$
\Delta_3 = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 - a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1
$$

この式 Δ_3 が、3 次の行列式として定義される。

係数行列と三次行列式

Δ_3 もまた、連立方程式の係数行列だけで決まる量である。

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}}_{\text{係数行列 } A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

そこで、二次の場合と同様に、次のように表記することにしよう。

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta_3$$

三次行列式の覚え方

3 次正方行列の行列式は、プラスの項とマイナスの項が入り混じっていて、一見複雑な形をしている。

$$\Delta_3 = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

この式に現れる項と符号は、次のように覚えるとよい。

> 添字が若い順に矢印を引いて、
>
> - 矢印が右下へ向かうなら正
> - 矢印が左下へ向かうなら負

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$+a_1b_2c_3 \qquad +a_2b_3c_1 \qquad +a_3b_1c_2$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$-a_3b_2c_1 \qquad -a_1b_3c_2 \qquad -a_2b_1c_3$$

行列式の項の規則性

さて、この調子で高次の行列式へと発展させていきたいが、4 次の行列式はどのような式になるだろうか？と問われたときに、今までのように 4 元連立方程式を加減法で解いて…という手順を踏むのは現実的ではない。

そろそろ、行列式の項の現れ方と符号の規則性を定式化する必要がある。

項の現れ方

三次行列式は 6 つの項からなるが、この項の数はどのように決まるのだろうか。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$+a_1b_2c_3 \qquad +a_2b_3c_1 \qquad +a_3b_1c_2$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$-a_3b_2c_1 \qquad -a_1b_3c_2 \qquad -a_2b_1c_3$$

このように三次行列式の各項を眺めると、

行列式の項は、各行各列から成分を 1 つずつ選ぶすべての組み合わせ

からなることがわかる。

同じ行から複数の成分を選んではいけないし、同じ列から複数の成分を選んでもいけない。

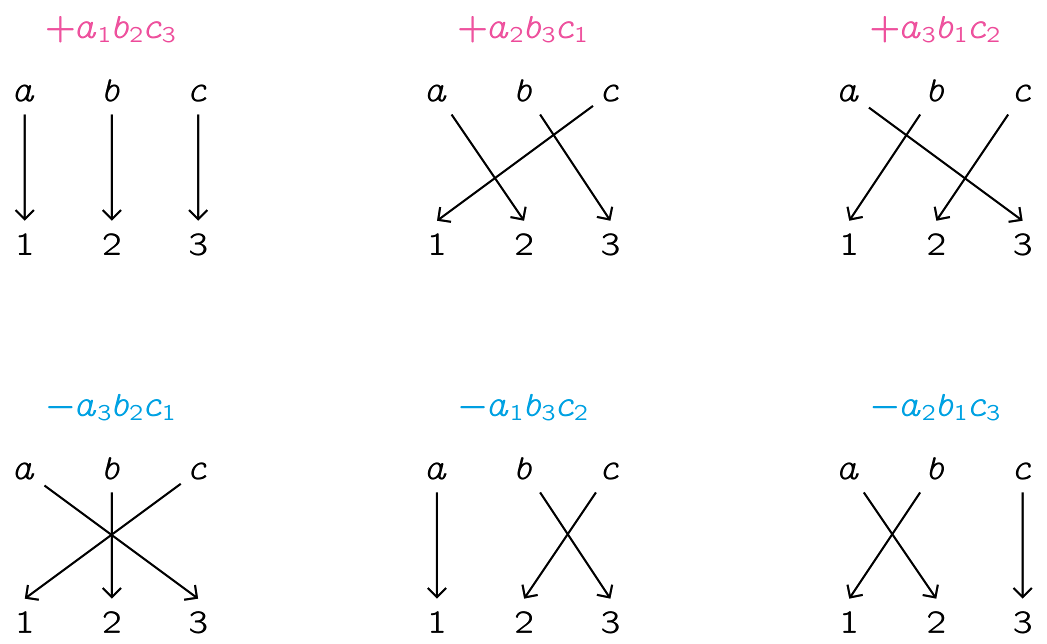
項の符号の規則性

加減法の操作と二次行列式の覚え方［第 16 章］で述べたように、行列式の負の項は、加減法における「係数を交差させるようにかけて"引く"」という操作から生まれるものである。

しかし 3 変数以上になると、このような符号のつき方を純粋に加減法の過程から理解することは難しい。ここでも、加減法の結果として得られた三次行列式の形から、符号の規則性を見出すことを目指そう。

「係数を交差させるようにかける」という操作によって、係数の添字を入れ替えたものどうしの積が現れることになる。

そこで、添字の入れ替わりという視点から、三次行列式の各項を整理してみると、ある規則性が見えてくる。



a からその添字、b からその添字、c からその添字、と結んだときに、

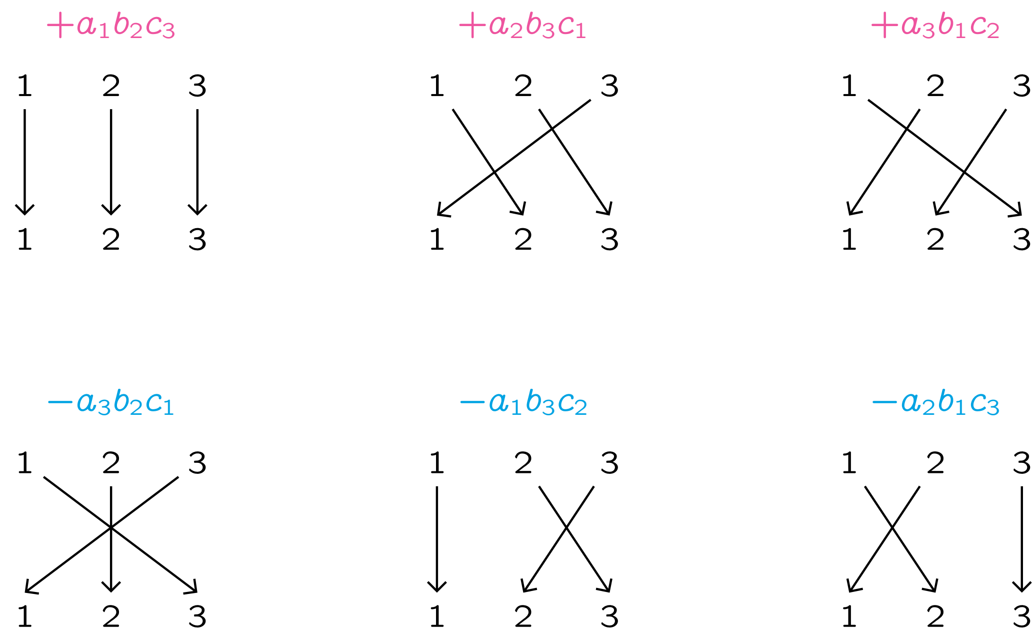
- 偶数回交差するなら正
- 奇数回交差するなら負

ここで、a は第 1 列、b は第 2 列、c は第 3 列に対応しており、a, b, c の添字は、各列から「選んだ行番号」を表している。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

- a の添字は、第 1 列から何行目の成分を選んだか
- b の添字は、第 2 列から何行目の成分を選んだか
- c の添字は、第 3 列から何行目の成分を選んだか

そこで、a, b, c をその対応する列番号 $1, 2, 3$ にそれぞれ置き換えると、各項の行番号と列番号の関係がわかりやすくなる。



行列式の各項の行番号と列番号は、並び替えた関係にある

- 偶数回の入れ替えで行番号と列番号が同じ並びになるなら正
- 奇数回の入れ替えで行番号と列番号が同じ並びになるなら負

このような、添字の並び替えの回数によって符号が定まる規則を定式化することで、4 次以上の場合にも通用する行列式の定義を与えることができる。

そのためには、まず「並び替え」というものを数学的に表現しなければならない。
そこで登場するのが、置換という概念である。

置換と互換

たとえば、$(1, 2, 3, 4)$ を並び替えた列 (i, j, k, l) があるとして、

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto i \\ 2 &\longmapsto j \\ 3 &\longmapsto k \\ 4 &\longmapsto l \end{aligned}$$

というように、番号を並び替える操作そのものを写像とみなし、置換と呼ぶ

def – 置換

集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ からそれ自身への写像 σ が全単射であるとき、σ は n 次の置換であるという

たとえば、

$$\sigma(1) = 2, \quad \sigma(2) = 3, \quad \sigma(3) = 1$$

によって 3 次の置換を定めることができる

この置換を、

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

と表記する

置換の積

写像とみる利点の 1 つは、積が定義できることである

もう 1 つの置換

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

が与えられたとき、合成写像 $\sigma \circ \tau$ は、

$$\begin{aligned} 1 &\overset{\tau}{\longmapsto} 1 \overset{\sigma}{\longmapsto} 2 \\ 2 &\overset{\tau}{\longmapsto} 3 \overset{\sigma}{\longmapsto} 1 \\ 3 &\overset{\tau}{\longmapsto} 2 \overset{\sigma}{\longmapsto} 3 \end{aligned}$$

なので、

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

である

通常、合成の記号 $\circ$ を書かずに $\sigma\tau$ と表記する

なお、$\sigma\tau$ と $\tau\sigma$ は一般に異なる

写像の合成の結合法則から、置換の積でも結合法則が成り立つ

⚓ theorem – 置換の積の結合法則

$$(\sigma\tau)\rho = \sigma(\tau\rho)$$

恒等置換

恒等写像

$$\begin{aligned}\mathrm{id}\colon \{1,2,\ldots,n\} &\longmapsto \{1,2,\ldots,n\}\\ \mathrm{id}(i) = i &\quad (1 \le i \le n)\end{aligned}$$

は置換であるので、これを恒等置換と呼び、

$$e = \mathrm{id}$$

と書く

任意の置換 σ に対して、明らかに

$$\sigma e = e\sigma = \sigma$$

が成り立つ

また、次の性質はのちに行列式の性質を議論する際に重要になる

theorem 16.1 – 恒等置換の単調性による特徴づけ

$i \le \sigma(i)$（あるいは $i \ge \sigma(i)$）を満たす置換 σ は恒等置換しか存在しない

証明

σ が恒等置換でないと仮定する

条件 $i \le \sigma(i)$ より、「元の位置より後ろに移される」、すなわち「すべてが自分以上に移る」ことになる

たとえば、1 を 2 に、2 を 3 に、$\ldots$、$n-1$ を n に写す置換を考える

しかし、集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ の要素は n 個しかないので、n を $n+1$ に写すことはできない

そこで、n を n に写すとすると、$n-1$ も n も n に写ることになり、これは置換が全単射であるという定義に反する

$i \ge \sigma(i)$ の場合も、「元の位置より前に移される」、すなわち「すべてが自分以下に移る」ことになると考えると、同様の矛盾が生じる

よって、σ は恒等置換でなければならない ■

逆置換

置換 σ は、定義より全単射であるので、逆写像 σ^{-1} が存在する

これを逆置換と呼ぶ

置換の集合

すべての n 次の置換からなる集合は群と呼ばれる構造を持っている

これを n 次対称群と呼び、記号 S_n で表す

互換

置換の中で最も基本的なのは、2 文字だけを交換する置換である

def - 互換

$1 \leq i \neq j \leq n$ のとき、$\sigma(i) = j,\ \sigma(j) = i$ であって、k が $i,\ j$ 以外のとき $\sigma(k) = k$ とすることで得られる置換を

$$\sigma = (ij)$$

と書き、このような置換を互換という

たとえば、

$$(24) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

互換の逆置換

互換は (ij) と書いても (ji) と書いても同じ操作を表す

i と j を交換してから j と i を交換すると元に戻るが、この (ij) と (ji) は互換としては同じなので、

> 互換の逆置換は自分自身

である

置換の一行表示

置換を表す 2 行の表示は、下の行だけで情報としては十分なので、たとえば

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

を $\sigma = 14325$ などと書いてしまうと便利である

これを σ の一行表示と呼ぶ

互換と置換の積

一行表示を用いた場合、互換と置換の積はたとえば次のように書ける

$\sigma = 14325$ とすると、

$$(12)\sigma = 24315, \quad \sigma(12) = 41325$$

$(12)\sigma$ は、$\sigma = 14325$ に互換 (12) を作用させて、24315 となる

$\sigma(12)$ は、12345 に互換 (12) を作用させて 21345 とし、さらに置換 σ を作用させることを意味する

置換 σ は、4 と 2 を入れ替える置換なので、21345 に対して σ を作用させると、41325 となる

この例の結果を一般的に述べると、次のようになる

> ⚓ **theorem – 互換と置換の積**
>
> $\sigma \in S_n$ に対して、$\tau = (ij)$ を左からかけた $\tau\sigma$ の一行表示は、σ の数字 i と j を交換したものである
>
> また、τ を右からかけた $\sigma\tau$ の一行表示は、σ の i 番目の数字と j 番目の数字を交換したものである

互換の積への分解

たとえば、$\sigma = 2413$ とすると、これは、

1. 1234 の 3 と 4 を交換して 1243
2. 1243 の 1 と 2 を交換して 2143
3. 2143 の 2 と 3 を交換して 2413

というように、互換に分解して考えることができる

数式でまとめると、

$$\sigma = (34)(12)(23)$$

theorem - 互換の積への置換の分解

任意の置換 σ は、いくつかの互換の積として書ける

証明

n に対する帰納法を用いる

$n = 1$ のときは、互換の定義における i, j の条件を満たさず、i, j 以外の k について $\sigma(k) = k$ とすることで得られる置換に相当するので、1 つの互換とみなせる

$(n-1)$ 次以下の置換が互換の積で書けることを仮定する

σ を n 次の置換とし、$\sigma(n)$ の値を c とする

$c = n$ すなわち $\sigma(c) = c$ の場合、σ は c をまったく動かしていないため、実質的に $c-1$ までの数字だけを並び替えていることになる

そのため、σ は $c-1$ すなわち $(n-1)$ 次の置換とみなせるため、帰納法の仮定より、互換の積として書ける

$c \neq n$ の場合、$\sigma(c)$ を d とし、d と c を交換する互換 $\tau = (cd)$ を考える

このとき、$\tau\sigma$ は、σ の数字 c と d を交換したものであるので、

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & c-1 & c & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & c-1 & \sigma(c) & \cdots & n \end{pmatrix}$$

c が n に一致しないという仮定をふまえると、

$$\tau\sigma(n) = n$$

であることが読み取れる

よって、$\tau\sigma$ は実質的に $(n-1)$ 次の置換とみなせるので、帰納法の仮定より、互換の積として書ける

$$\tau\sigma = \tau_1\tau_2\cdots\tau_m$$

ゆえに、

$$\sigma = \tau^{-1}\tau_1\tau_2\cdots\tau_m$$

であるが、互換の逆置換は自分自身であるので、

$$\sigma = \tau\tau_1\tau_2\cdots\tau_m$$

と書ける ■

置換の符号と偶奇

すべての置換は互換の積に分解できるが、その方法は一通りではない

しかし、互換の積の個数の偶奇性は、置換が与えられれば定まる

このことを証明するために、置換と多項式の関係を考察する

置換の多項式への作用

置換 $\sigma \in S_n$ と n 変数多項式 $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が与えられたとき、変数 x_i に $x_{\sigma(i)}$ を代入することにより、式 σf を

$$(\sigma f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

と定める

⚓ theorem 16.2 - 置換作用の結合法則

$f = f(x_1, \ldots, x_n)$ を n 変数の多項式とし、$\sigma, \tau \in S_n$ とするとき、

$$(\sigma\tau)f = \sigma(\tau f)$$

証明

式 τf は、

$$(\tau f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)})$$

である

さらに σ を作用させると、$x_{\tau(i)}$ は $x_{\sigma(\tau(i))} = x_{(\sigma\tau)(i)}$ に置き換わるので、

$$\begin{aligned}(\sigma(\tau f)) &= f(x_{(\sigma\tau)(1)}, \ldots, x_{(\sigma\tau)(n)}) \\ &= ((\sigma\tau)f)(x_1, \ldots, x_n)\end{aligned}$$

が成り立つ ■

互換の差積への作用

次のような n 変数の多項式を**差積**と呼ぶ

$$\begin{array}{cccc}(x_1 - x_2) & (x_1 - x_3) & \cdots & (x_1 - x_n) \\ & (x_2 - x_3) & \cdots & (x_2 - x_n) \\ & & \ddots & \\ & & & (x_{n-1} - x_n)\end{array}$$

def - 差積

次のような n 変数の多項式を**差積**と呼ぶ

$$\Delta_n = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$$

置換の符号を理解するために、差積を使うことができる

その第一歩となるのが、次の定理である

theorem 16.3 - 互換による差積の符号変化

τ を互換とするとき、

$$\tau \Delta_n = -\Delta_n$$

証明

$i < j$ として、$\tau = (ij)$ とすると、各因子 $x_s - x_t \, (1 \leq s < t \leq n)$ の変化は次のようになる

$x_i - x_j$ は $x_j - x_i$ になる

x_i と x_j を入れ替えることで、その差が逆転して符号が反転する

$$x_j - x_i = -(x_i - x_j)$$

よって、この項は -1 倍の効果をもたらす

$s < i < j$ のとき、$x_s - x_i$ と $x_s - x_j$ が入れ替わる

この場合、s は i, j より前の添字である

- 互換前：$(x_s - x_i)(x_s - x_j)$
- 互換後：$(x_s - x_j)(x_s - x_i)$

2 つの項が交換されるだけなので、積の絶対値は変わらず、符号にも影響しない

$i < j < s$ のとき、$x_i - x_s$ と $x_j - x_s$ が入れ替わる

この場合、s は i, j より後の添字である

- 互換前：$(x_i - x_s)(x_j - x_s)$
- 互換後：$(x_j - x_s)(x_i - x_s)$

この場合も、並び順だけが入れ替わり、符号には影響しない

$i < s < j$ のとき、$x_i - x_s$ と $x_s - x_j$ は…

この場合、s は i と j の間にある添字である

- 互換前：$(x_i - x_s)(x_s - x_j)$
- 互換後：$(x_j - x_s)(x_s - x_i)$

互換前の積を変形してみると、

$$\begin{aligned}(x_i - x_s)(x_s - x_j) &= -(x_i - x_s)(x_j - x_s) \\ &= (x_s - x_i)(x_j - x_s) \\ &= (x_j - x_s)(x_s - x_i)\end{aligned}$$

という形で、互換後の積が得られる

よって、この場合も積の符号は変わらない

以上をふまえると、符号が反転するのは $x_i - x_j$ の項だけである

よって、1 回の互換 (ij) によって、差積全体は (-1) 倍される ■

置換の符号

theorem - 置換による差積の符号変化

置換 $\sigma \in S_n$ が s 個の互換の積として書けるならば、

$$\sigma\Delta_n = (-1)^s\Delta_n$$

が成り立つ

証明

置換 σ を s 個の互換の積 $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_s$ と書いたとき、

$$\sigma\Delta_n = (\tau_1 \cdots \tau_s)\Delta_n$$

theorem 16.2「置換作用の結合法則」を用いて、

$$\sigma\Delta_n = (\tau_1 \cdots \tau_{s-1})(\tau_s\Delta_n)$$

theorem 16.3「互換による差積の符号変化」を繰り返し用いると、

$$\begin{aligned}\sigma\Delta_n &= (\tau_1 \cdots \tau_{s-1})(-\Delta_n) \\ &= (-1)(\tau_1 \cdots \tau_{s-1})\Delta_n \\ &= (-1)^s\Delta_n\end{aligned}$$

が最終的に得られる ■

この定理における $\sigma\Delta_n$ は、σ をどのような互換の積として表すかとは無関係に、σ が与えられれば決まる多項式である

そして、$(-1)^s$ という部分から、σ を互換の積で表したとき、その個数 s が偶数であれば符号は $+$ に、奇数であれば符号は $-$ になることがわかる

このようにして、次の定理が示されたことになる

theorem - 置換の符号の存在

置換 σ を互換の積として書くとき、用いられる互換の個数の偶奇は σ のみによって決まる

そこで、置換の符号を次のように定義する

def - 置換の符号

置換 $\sigma \in S_n$ を互換の積 $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_i$ として書いたとき、σ の**符号**を

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^i$$

と定義する

そして、互換の個数の偶奇をそのまま、置換の偶奇として定める

def - 偶置換と奇置換

置換 $\sigma \in S_n$ の符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ が $+1$ であれば σ を**偶置換**と呼び、-1 であれば**奇置換**と呼ぶ

置換の性質

theorem 16.4 - 逆置換の符号

$$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$$

証明

置換 σ を互換の積として書くと、逆置換はその互換の順序を逆にしたものになる

すなわち、$\sigma = \tau_1 \cdots \tau_s$ とすると、

$$\sigma^{-1} = \tau_s^{-1} \cdots \tau_1^{-1}$$

であるが、互換の逆置換は自分自身であるので、

$$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = (-1)^s = \mathrm{sgn}(\sigma)$$

が成り立つ ■

theorem 16.5 - 置換の符号の乗法性

$$\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)$$

証明

それぞれを互換の積 $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_i$、$\tau = \rho_1 \cdots \rho_j$ と書くと、

$$\sigma\tau = \tau_1 \cdots \tau_i \rho_1 \cdots \rho_j$$

である

このとき、$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^i$, $\mathrm{sgn}(\tau) = (-1)^j$ なので、

$$\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = (-1)^{i+j} = (-1)^i(-1)^j = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)$$

が成り立つ ■

⚓ theorem 16.6 - 置換群の左右作用に対する和の不変性

f を S_n 上の関数とするとき、任意の $\tau \in S_n$ に対して、次が成り立つ

$$\sum_{\sigma \in S_n} f(\tau\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma\tau)$$

証明

τ を固定して、σ をすべての置換（S_n の元）全体にわたって動かすとき、$\tau\sigma$ も S_n の全体を動く

言い換えると、写像 $S_n \to S_n$ を $\sigma \longmapsto \tau\sigma$ と定めると、これは全単射である

したがって、

$$\sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\tau\sigma)$$

が成り立つ

同様に、写像 $S_n \to S_n$ を $\sigma \longmapsto \sigma\tau$ と定めると、これも全単射であるので、同様に、

$$\sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma\tau)$$

が成り立つことがわかる ■

行列式の定義

ある正方行列の**行列式**は、

1. 各列から 1 つずつ、行に重複がないように成分を選ぶ

2. それらをかけ合わせる
3. 符号をつけて足す

という手順で定まる値である

def - 行列式

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、

$$\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

で定められる値を A の**行列式**と呼び、$|A|$ あるいは $\det(A)$ と表記する

三角行列の行列式

三角行列の場合、各列から 1 つずつ、0 でない成分を重複なく選び出す方法は、対角成分をすべて選ぶしかない

theorem 16.7 - 三角行列の行列式

三角行列の行列式は、対角成分の積である

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{0} & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \text{0} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

証明

行列式において、

$$a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)} = 0$$

となる項は、和をとったときに消えてしまう

したがって、

$$a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)} \neq 0$$

すなわち

$$a_{1,\sigma(1)} \neq 0, \ldots, a_{n,\sigma(n)} \neq 0$$

となるような選び方を考える

上三角行列の場合

上三角行列の定義より、$i > j$ ならば $a_{ij} = 0$ である

$a_{ij} \neq 0$ とするには、$i \leq j$ でなければならないので、$a_{i,\sigma(i)}$ においては、

$$i \leq \sigma(i)$$

である必要がある

そして、この条件を満たす置換は、theorem 16.1「恒等置換の単調性による特徴づけ」より、恒等置換しか存在しないので、

$$\sigma(i) = i$$

より、a_{ii} の積によって行列式の値が構成される

また、恒等置換は 0（偶数）回の互換で構成されるので、各項の符号は正となる ■

下三角行列の場合

下三角行列の定義より、$i < j$ ならば $a_{ij} = 0$ である

$a_{ij} \neq 0$ とするには、$i \geq j$ でなければならないので、$a_{i,\sigma(i)}$ においては、

$$i \geq \sigma(i)$$

である必要がある

そして、この条件を満たす置換も、theorem 16.1「恒等置換の単調性による特徴づけ」より、恒等置換しか存在しないので、上三角行列の場合と同様の結果が得られる ■

対角行列は、上三角行列でもあり下三角行列でもあるので、上の定理の特別な場合として次が成り立つ

theorem - 対角行列の行列式

対角行列の行列式は、対角成分の積である

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & \text{O} & \\ & & \ddots & & \\ & \text{O} & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特に、対角成分がすべて 1 の場合が単位行列である

theorem - 単位行列の行列式

単位行列の行列式は 1 である

$$|E| = 1$$

行列式の基本性質

次の性質により、以後議論する行列式の性質が列に対して成り立つなら、行に対しても成り立つといえるようになる

theorem 16.8 - 行列式の対称性

$$\det({}^t A) = \det(A)$$

証明

行列式の定義より、行列 ${}^t A$ の行列式は、行列 A の行列式に現れる $a_{i,\sigma(i)}$ の添字を入れ替えたもの $a_{\sigma(i),i}$ の積和になる

$$\det({}^t A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

一方、$j = \sigma(i)$ とおくと、$i = \sigma^{-1}(j)$ となるので、添字の変数を変換して

$$\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma^{-1}(j)}$$

よって、$\det({}^t A)$ の各項は、

$$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma^{-1}(j)}$$

となるが、これは $\det(A)$ の定義式の σ^{-1} に対応する項と同じである

ここで、$\rho = \sigma^{-1}$ とおくと、$\sigma = \rho^{-1}$ であり、theorem 16.4「逆置換の符号」から $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\rho^{-1}) = \mathrm{sgn}(\rho)$ であるから、

$$\det({}^t A) = \sum_{\rho \in S_n} \mathrm{sgn}(\rho) \prod_{j=1}^{n} a_{j,\rho(j)} = \det(A)$$

よって、$\det({}^t A) = \det(A)$ が示された ■

theorem – 行列式の列についての交代性

行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ において、2 つの列を入れ替えた行列を作ると、その行列の行列式の値は、元の行列 A の行列式の値の (-1) 倍になる

$$\begin{aligned}&\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n)\\&\qquad = -\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n)\\&\qquad\qquad (1 \leq i < j \leq n)\end{aligned}$$

証明

元々の行列 A の行列式の各項が、

$$f(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(i),i} \cdots a_{\sigma(j),j} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

であるのに対し、第 i 列と j 列を入れ替えた行列の行列式の各項は、

$$\operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(i),j} \cdots a_{\sigma(j),i} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

となる

ここで、i を j に、j を i に写す互換 $\sigma_0 = (ij)$ を考え、$\tau = \sigma\sigma_0$ とおくと、$\sigma(j) = \tau(i)$, $\sigma(i) = \tau(j)$ となるので、

$$f(\tau) = \operatorname{sgn}(\tau) a_{\tau(1),1} \cdots a_{\tau(i),i} \cdots a_{\tau(j),j} \cdots a_{\tau(n),n}$$

このとき、**theorem 16.6「置換群の左右作用に対する和の不変性」**より、

$$\sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma\sigma_0) = \sum_{\tau \in S_n} f(\tau)$$

すなわち、σ 全体の総和は τ 全体の総和に一致する

さらに、**theorem 16.5「置換の符号の乗法性」**より、

$$\operatorname{sgn}(\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\sigma_0) = -\operatorname{sgn}(\sigma)$$

であるから、

$$f(\sigma) = -f(\tau)$$

よって、列の交換後、行列式全体が (-1) 倍される ■

theorem - 行列式の列についての多重線形性

行列式を列の関数とみたとき、この関数は、どの列についても線形である

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \\ = \alpha \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \\ + \beta \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{v}, \ldots, \boldsymbol{a}_n)\end{aligned}$$

証明

$\sigma \in S_n$ に対応する各項について、

$$a_{\sigma(1),1} \cdots (\alpha u_{\sigma(i)} + \beta v_{\sigma(i)}) \cdots a_{\sigma(n),n}$$

$C = a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$ とし、$A = \alpha u_{\sigma(i)}$, $B = \beta v_{\sigma(i)}$ とおくと、

$$C(A+B) = CA + CB = \alpha C u_{\sigma(i)} + \beta C v_{\sigma(i)}$$

のように展開できる

よって、

$$\begin{aligned}\alpha(a_{\sigma(1),1} \cdots u_{\sigma(i)} \cdots a_{\sigma(n),n}) \\ + \beta(a_{\sigma(1),1} \cdots v_{\sigma(i)} \cdots a_{\sigma(n),n})\end{aligned}$$

を用いれば、行列式の定義に基づいて定理が成り立つことがわかる ■

theorem 16.8「行列式の対称性」より、次の定理も得られる

theorem - 行列式の行についての多重線形性と交代性

行列式は行に関しても多重線形性と交代性をもつ

以降、列に対して成り立つ性質は行に対しても成り立つとし、列の場合のみを記載する

行列式の値が零になる条件

theorem 16.9 - 列の重複による行列式の零化

$A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ の n 個の列の中に、まったく同じものがあれば、

$$\det(A) = 0$$

となる

証明

行列 A の列ベクトルに、共通のベクトル $\boldsymbol{u}$ が含まれているとする

$$A = (\ldots, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}, \ldots)$$

この 2 つの $\boldsymbol{u}$ の列を入れ替えると、

$$\det(\ldots, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}, \ldots) = -\det(\ldots, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}, \ldots)$$

ところが、入れ替えの前後で行列そのものは変化していない（まったく同じ列を入れ替えても行列は同じ）ので、行列式の値も変わらないはずである

すなわち、

$$\det A = -\det A$$

が成り立つ

ここで、両辺に $\det(A)$ を足すと、

$$2\det A = 0$$

より、$\det A = 0$ が成り立つ ■

theorem – 列ベクトルの線形従属性による行列式の零化

$A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ の n 個の列ベクトルが線形従属であるとすれば、

$$\det(A) = 0$$

となる

証明

列ベクトルのうち 1 つ $\boldsymbol{a}_i$ が、残りのいくつかの線型結合で表されるとすると、

$$\det(\ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots) = \det\left(\ldots, \sum_{j=1}^{k} c_j \boldsymbol{a}_j, \ldots\right)$$

行列式の多重線形性より、

$$\det\left(\ldots, \sum_{j=1}^{k} c_j \boldsymbol{a}_j, \ldots\right) = \sum_{j=1}^{k} c_j \det(\ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots)$$

ここで、$\boldsymbol{a}_j$ は $\boldsymbol{a}_i$ 以外のいずれかの列ベクトルであるため、右辺の行列式では列ベクトルの重複が生じている

よって、行列式の値は 0 になる ■

この定理の対偶をとることにより、次の定理が得られる

theorem 16.10 – 非零行列式による列ベクトルの線形独立性

$A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ の行列式の値が 0 でないならば、A の n 個の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は線形独立である

基本変形と行列式

行列式の性質から、行列の列や行に関する基本変形と行列式の関係が見えてくる

⚓ theorem – 基本変形と行列式の関係

i. 列（行）を交換すると行列式の符号が交換される

ii. 列（行）を定数倍すると、行列式の値も定数倍される

iii. 列（行）に他の列（行）の定数倍を加えても行列式の値は変化しない

(i) は行列式の交代性、(ii) は多重線形性であり、(iii) は次の定理によって示される

⚓ theorem – 列の掃き出しに関する不変性

$i \neq j$ のとき、

$$\begin{aligned}&\det(\dots, \boldsymbol{a}_i + c\boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_j \dots) \\ &\qquad = \det(\dots, \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_j \dots)\end{aligned}$$

証明

行列式の多重線形性より、

$$\begin{aligned}&\det(\dots, \boldsymbol{a}_i + c\boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_j \dots) \\ &\qquad = \det(\dots, \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_j \dots) + c\det(\dots, \boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_j \dots)\end{aligned}$$

ここで、同じ列ベクトル $\boldsymbol{a}_j$ が 2 つ含まれている行列式の値は 0 になるので、

$$\det(\dots, \boldsymbol{a}_i + c\boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_j \dots) = \det(\dots, \boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_j \dots)$$

だけが残る ■

行列式の特徴づけ

n 個の与えられた n 次実ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ に対して、ある実数が定まるとき、これを $F(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$ と表すことにする

theorem 16.11 – 多重線形性と交代性による行列式の特徴づけ

写像 $F\colon \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が多重線形性と交代性を満たすならば、

$$F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

証明

多重線形性により、

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) &= F\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i_1 1}\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{i_n n}\boldsymbol{e}_{i_n}\right) \\ &= \sum_{i_1, \ldots, i_n} a_{i_1 1} \cdots a_{i_n n} F(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n}) \end{aligned}$$

和において、各 $i_k\ (1 \leq k \leq n)$ は行番号なのでそれぞれ 1 から n まで動く

ここで、theorem 16.9「列の重複による行列式の零化」より、$(i_1, \ldots, i_n)$ に同じ添字が 2 つ以上ある場合には $F(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n}) = 0$ である

したがって、この和は $(i_1, \ldots, i_n)$ がすべて異なる場合、すなわち $(i_1, \ldots, i_n)$ が $(1, \ldots, n)$ の置換である場合にのみ寄与する

よって、$(i_1, \ldots, i_n)$ にわたる和は、実際には n 次の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in S_n$$

にわたる和であるとみなせる

この対応により、$(i_1, \ldots, i_n)$ と $\sigma \in S_n$ を同一視すると、

$$F(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n}) = F(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)})$$

さらに、$(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)})$ を $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ に並び替えることを考える

すなわち、σ の逆置換 σ^{-1} を考えることになる

交代性によって、1 回の互換につき (-1) 倍されるが、全体の符号は互換の回数によって定まるので、$\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$ となる

$$F(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$$

以上より、

$$\begin{aligned}
&F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} F(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \operatorname{sgn}(\sigma) F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \\
&= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \right) F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \\
&= \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)
\end{aligned}$$

となり、目的の等式が示された ■

ここで、$F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = 1$ であれば、

$$F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

と表せることになる

この $F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = 1$ を正規化の条件といい、行列式は

i. 双線形性
ii. 交代性
iii. 正規化の条件

によって特徴づけられる

すなわち、行列式は、この 3 つの条件を満たすような

> n 個の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ で定まる関数

として定義することもできる

行列式の幾何学的意味

[Todo 1:]

行列の積と行列式

行列式の特徴づけから導ける性質として、次が重要である

theorem 16.12 - 行列式の乗法性

A, B を同じ型の行列とするとき、

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

証明

B の列ベクトルを $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ とし、次の関数

$$F(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n) = \det(A\boldsymbol{b}_1, \ldots, A\boldsymbol{b}_n)$$

を考える

ここで、det は列ベクトルに対して交代性をもつため、この関数 F も交代性をもつ

また、det の多重線形性に加え、A による作用は線形写像であるから、F も多重線形性を満たす

よって、theorem 16.11「多重線形性と交代性による行列式の特徴づけ」より、

$$F(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n) = F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\det(B)$$

一方、F の引数を単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ にしたもの

$$F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = \det(A\boldsymbol{e}_1, \ldots, A\boldsymbol{e}_n)$$

を考えると、

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) &= \det(A\boldsymbol{e}_1, \ldots, A\boldsymbol{e}_n) \\ &= \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

よって、

$$F(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n) = \det(A)\det(B)$$

ここで、$F(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ の定義を思い出すと、

$$\det(A\boldsymbol{b}_1, \ldots, A\boldsymbol{b}_n) = \det(A)\det(B)$$

左辺の行列 $(A\boldsymbol{b}_1, \ldots, A\boldsymbol{b}_n)$ は、行列 B の各列ベクトルに対して A を左から作用させたものであり、行列 AB を意味している

したがって、

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

が成り立つ ■

行列式の乗法性を繰り返し適用することで、次の定理が得られる

⚓ theorem – 累乗行列の行列式と行列式の累乗

A, B を正方行列とするとき、任意の自然数 n について、

$$\det(A^n) = \det(A)^n$$

行列式と正則性

行列式は、正則性の判定にも利用できる

⚓ theorem – 正則性と行列式の非零性

$$A \text{ が正則行列} \iff \det(A) \neq 0$$

証明

$\Longrightarrow$

A が正則であることから、

$$AA^{-1} = E$$

両辺の行列式をとって、

$$\det\left(AA^{-1}\right) = \det(E)$$

左辺には行列式の乗法性を適用し、右辺は単位行列の行列式の値が 1 であることから、

$$\det(A)\det\left(A^{-1}\right) = 1$$

もし $\det(A) = 0$ だと仮定すると、$0 = 1$ という矛盾した式になる

よって、$\det(A) \neq 0$ でなければならない ■

$\Longleftarrow$

theorem 16.10「非零行列式による列ベクトルの線形独立性」より、

$\det(A) \neq 0$ であることから、行列 A の列ベクトルは線型独立である

そして、theorem 11.5「列ベクトルの線型独立性による正則の判定」より、A の列ベクトルが線型独立であることと、A が正則であることは同値である ■

この定理の派生として、行列式を次の形で使うことが多い

theorem 16.13 – 消去法の原理

A を正方行列とするとき、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ に非自明解が存在する} \iff \det(A) = 0$$

余因子展開

3 次正方行列において、第 1 列を次のようにとらえる

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{31}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

これをふまえて、3 次行列式を、第 1 列に関する線形性を用いて、次のような和に分解してみる

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

ここで、たとえば、

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

をどのように表せるかを考える

まず、$(1, 1)$ 成分を要にして第 1 行の掃き出しを行えば、

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

が得られる

そこで、

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

とおき、

$$F(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = F(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

とみなす

ここで、

$$F(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

であるから、結局、

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

が得られる

2 項めの行列式も同様に、掃き出し法によって、

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

これを、

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

の関数 $F(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ とみなす

交代性より、

$$F(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \det(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3)$$

$$= -\det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = -1$$

なので、

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

最後の項の行列式も同様にして、

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

と表せる

以上より、3 次行列式は、次のような 2 次行列式の和に分解できる

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

このような行列式の展開を一般化したものが、余因子展開である

def – 余因子

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ から、第 i 行と第 j 列を取り除いて $(n-1)$ 次の正方行列 Δ_{ij} を作り、その行列式に符号 $(-1)^{i+j}$ をかけたものを、A の (i, j) 余因子と呼び、$\tilde{a}_{ij}$ と書く

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\Delta_{ij})$$

theorem – 余因子展開

$\det(A)$ は次のように余因子展開できる

第 j 列に関する展開

$$\det(A) = \tilde{a}_{1j}a_{1j} + \tilde{a}_{2j}a_{2j} + \cdots + \tilde{a}_{nj}a_{nj}$$

第 i 行に関する展開

$$\det(A) = \tilde{a}_{i1}a_{i1} + \tilde{a}_{i2}a_{i2} + \cdots + \tilde{a}_{in}a_{in}$$

証明

列に関する展開だけを示せば、行の方は theorem 16.8「行列式の対称性」よりしたがう

行列 A を $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ のように列ベクトル表示する

すると、

$$\boldsymbol{a}_j = a_{1j}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{e}_n$$

なので、行列式の多重線形性を用いて、

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{a}_1, \ldots, a_{ij}\boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n| \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n|
\end{aligned}
$$

$|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n|$ に対して、(i, j) 成分を要にして第 i 行を掃き出す操作を行うと、

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & 1 & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

さらに、i 行目を 1 つ上の行と順に交換して 1 行目まで移動し、次に j 列目を 1 つ左の列と順に交換して 1 列目まで移動する

行や列の交換から生じる符号の変化は、$(i-1)+(j-1)$ の交換を行っているので、$(-1)^{i+j-2} = (-1)^2(-1)^{i+j} = (-1)^{i+j}$ となる

よって、次のような形が得られる

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n| &= (-1)^{i+j}
\begin{vmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} \\
&= (-1)^{i+j}
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

ここで現れる行列式は、第 1 行・第 1 列に移動させた第 i 行・第 j 列を取り除いた $(n-1)$ 次正方行列の行列式である

よって、符号の部分も合わせて、余因子の定義より、次のように書ける

$$
|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n| = \tilde{a}_{ij}
$$

したがって、行列 A の行列式は、

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{ij}$$

と書けることが示された ■

余因子行列と逆行列の公式

[Todo 2:]

クラメルの公式

[Todo 3:]

Zebra Notes

Type	Number
todo	3