第 17 章

三次元ベクトルの外積

二つのベクトルに垂直なベクトル

3 次元空間における 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ に対して、どちらとも垂直になるベクトル $\boldsymbol{v}$ を求める問題を考える。

もし $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ がどちらも零ベクトルであるなら、零ベクトルは任意のベクトルと垂直であるため、任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の双方と垂直になる。

そこで、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の少なくとも一方が零ベクトルでない場合を考えることにする。

どちらも $\boldsymbol{v}$ と直交するという条件は、内積を用いて次のように書ける。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{o} \end{aligned}$$

成分を用いて書くと、

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 &= 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 &= 0 \end{aligned}$$

ここで、$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ の両辺に b_1 を、$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ の両辺に a_1 をかける。

$$\begin{aligned} b_1(a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3) &= 0 \\ a_1(b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3) &= 0 \end{aligned}$$

それぞれ展開して、

$$
\begin{aligned}
a_1b_1v_1 + a_2b_1v_2 + a_3b_1v_3 = 0 \\
a_1b_1v_1 + a_1b_2v_2 + a_1b_3v_3 = 0
\end{aligned}
$$

辺々を引いた上で整理すると、

$$
(a_2b_1 - a_1b_2)v_2 + (a_3b_1 - a_1b_3)v_3 = 0
$$

この式は、次のような内積が 0 となる式として解釈することができる。

$$
\begin{pmatrix} a_2b_1 - a_1b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0
$$

ここで、2 次元ベクトルについて、次が成り立つことを利用する。

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = xy - xy = 0
$$

これより、

$$
\begin{pmatrix} a_2b_1 - a_1b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_3b_1 - a_1b_3 \\ -(a_2b_1 - a_1b_2) \end{pmatrix} = 0
$$

となるので、

$$
\begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3b_1 - a_1b_3 \\ -(a_2b_1 - a_1b_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}
$$

とおけばよい。

これで v_2, v_3 が求まったので、あとは v_1 を求めればよい。

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ という式

$$
a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0
$$

において、$a_1 \neq 0$ と仮定すると、

$$
\begin{aligned}
v_1 &= -\frac{a_2v_2 + a_3v_3}{a_1} \\
&= -\frac{a_2v_2}{a_1} - \frac{a_3v_3}{a_1} \\
&= -\frac{a_2(a_3b_1 - a_1b_3)}{a_1} - \frac{a_3(a_1b_2 - a_2b_1)}{a_1} \\
&= -\frac{a_2a_3b_1}{a_1} + \frac{a_2a_1b_3}{a_1} - \frac{a_3a_1b_2}{a_1} + \frac{a_3a_2b_1}{a_1} \\
&= -\frac{a_2a_3b_1}{a_1} + a_2b_3 - a_3b_2 + \frac{a_2a_3b_1}{a_1} \\
&= a_2b_3 - a_3b_2
\end{aligned}
$$

以上より、

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

def - $\mathbb{R}^3$ における二つのベクトルの外積

3 次元空間における 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ に対して、次のように定義されるベクトルを、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**外積**あるいは**クロス積**という。

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

外積のノルム

外積はベクトルであるから、そのノルムを定めることができる。

そこで重要となるのが、次の定理である。

theorem - ラグランジュの恒等式

任意の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ に対して、次が成り立つ。

$$\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2$$

証明

$\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|^2$ を成分表示により計算すると、

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= \left(a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2a_3b_2b_3\right) + \left(a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_3a_1b_3b_1\right) \\ &\quad + \left(a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2\right) \\ &= \underbrace{\left(a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2\right)}_{(*)} \\ &\quad - 2\underbrace{\left(a_1a_2b_1b_2 + a_2a_3b_2b_3 + a_3a_1b_3b_1\right)}_{(**)}\end{aligned}$$

また、ノルムの定義を用いて $\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\ &= a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 \\ &\quad + \left(a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2\right) \\ &= \underbrace{\left(a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2\right)}_{(\dagger)} + (*)\end{aligned}$$

内積の定義を用いて $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2$ を計算すると、

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + 2\left(a_1a_2b_1b_2 + a_2a_3b_2b_3 + a_3a_1b_3b_1\right) \\ &= (\dagger) + 2(**)\end{aligned}$$

以上より、

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 &= (\dagger) + (*) - (\dagger) + 2(**) \\ &= (*) - 2(**) \\ &= \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|^2\end{aligned}$$

となり、目的の等式が得られた。 ■

ここで、ベクトルのなす角の定義より、内積が

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \cos\theta$$

と表せることを用いると、外積のノルムは次のように表現できる。

theorem - $\mathbb{R}^3$ における外積のノルム

任意の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ に対して、次が成り立つ。

$$\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta$$

証明

ラグランジュの恒等式より、

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|^2 &= \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 \\
&= \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \cos\theta)^2 \\
&= \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 \cos^2\theta \\
&= \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2(1 - \cos^2\theta) \\
&= \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 \sin^2\theta \\
&= (\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta)^2
\end{aligned}$$

両辺の平方根をとることで、

$$\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta$$

が得られる。 ■

[Todo 1: 図形的意味]

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	1