第 25 章

抽象線形空間

線形空間の公理

線形代数の理論は線型独立性や線形写像を基礎にしている
これらは線形結合、すなわちベクトルの和とスカラー倍を用いて定義された
任意のベクトルは線形結合で表され、線形写像は線形結合を保つ写像として定義される

そこで、和とスカラー倍が定義された一般の集合に対しても、線型空間の理論を適用できないか？と考える

和とスカラー倍が定義された一般の集合を、改めて線形空間として定義する
そして、その集合の元をベクトルと呼ぶことにする
和とスカラー倍が定義されていれば、線形結合によりその元を表すことができるからだ

def – 線形空間

集合 V の任意の元 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ と体 K の任意の元 k に対して、V の元 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（和）が定まり、$V$ の元 $k\boldsymbol{a}$（スカラー倍）が定まるとする
これらの演算が次の条件を満たすとき、V を K 上の線形空間、あるいは K 線型空間と呼び、線型空間の元をベクトルと呼ぶ

i. 交換法則：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

ii. 結合法則：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$、$k(l\boldsymbol{a})=(kl)\boldsymbol{a}$

iii. 分配法則：$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$、$(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$

iv. $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$（1 は体 K の乗法に関する単位元）

v. 零元の存在：$\boldsymbol{0}$ と書かれる特別な元が存在し、任意の $\boldsymbol{a}\in V$ に対して $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$

vi. 和に関する逆元の存在：任意の $\boldsymbol{a}\in V$ に対して $-\boldsymbol{a}$ と書かれる特別な元が存在し、$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

線形写像の空間

V, W をともに有限次元 K 上の線形空間とする。

線型写像のことを**準同型**（homomorphism）と呼ぶこともある。
この英語訳から、V から W への線形写像全体の集合を $\mathrm{Hom}(V,W)$ と表す。

また、$V=W$ のときは、V の線形変換を V の**自己準同型**（endomorphism）と呼ぶこともある。この英語訳から、V の線形変換全体の集合を $\mathrm{End}(V)$ と表す。

このとき、$\mathrm{Hom}(V,W)$ に線型空間の構造（和とスカラー倍）を次のように導入する

def 25.1 - 線形写像の和とスカラー倍

線形写像 $f,g\in\mathrm{Hom}(V,W)$ と $c\in K$ に対して、和とスカラー倍を次のように定義する

$$(f+g)(v):=f(v)+g(v)$$
$$(cf)(v):=c\cdot f(v)$$

これらの演算は、再び $V\to W$ の線形写像を定めることが確認できる

theorem 25.1 - 線形写像全体による線形空間

線形写像全体の集合 $\mathrm{Hom}(V, W)$ は K 上の線形空間である

証明

加法が線形性を満たす

f, g をともに線形写像とし、任意の $v_1, v_2 \in V$ と $a, b \in K$ に対して、

$$
\begin{aligned}
&(f+g)(av_1+bv_2)\\
&= f(av_1+bv_2)+g(av_1+bv_2)\\
&= af(v_1)+bf(v_2)+ag(v_1)+bg(v_2)\\
&= a(f(v_1)+g(v_1))+b(f(v_2)+g(v_2))\\
&= a(f+g)(v_1)+b(f+g)(v_2)
\end{aligned}
$$

よって、$f+g$ は線形写像である ■

スカラー倍が線形性を満たす

f を線形写像とし、任意の $v_1, v_2 \in V$ と $a, b, c \in K$ に対して、

$$
\begin{aligned}
(cf)(av_1+bv_2) &= cf(av_1+bv_2)\\
&= c\cdot(f(av_1+bv_2))\\
&= c\cdot(f(av_1)+f(bv_2))\\
&= c\cdot(af(v_1)+bf(v_2))\\
&= a(cf)(v_1)+b(cf)(v_2)
\end{aligned}
$$

よって、cf は線形写像である ■

線型空間の公理をすべて満たすことも、容易に確認できる ■